



PROJETO DE GRADUAÇÃO

PROPAGAÇÃO DE TRINCAS EM CHAPAS METÁLICAS USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Por,
Rafaell Rocha Reboredo

Brasília, 10 de Julho de 2013

UNIVERSIDADE DE BRASILIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECANICA

PROJETO DE GRADUAÇÃO

**PROPAGAÇÃO DE TRINCAS EM CHAPAS
METÁLICAS USANDO O MÉTODO DOS
ELEMENTOS DE CONTORNO**

POR,

Rafaell Rocha Reboredo

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheiro Mecânico.

Banca Examinadora

Prof. Éder Lima de Albuquerque, UnB/ ENM
(Orientador)

Prof. Fábio Comes de Castro, UnB/ ENM

Prof. José Alexander Araújo, UnB/ ENM

Brasília, 10 de Julho de 2013

Dedicatória

Dedico este trabalho à toda minha família. Aos meus pais, Gleice e Antonio; aos meus irmãos, Renan, Andressa e Andrey; à minha futura esposa, Fernanda e aos meus sogros, Sandra e Henrique.

Rafaell Rocha Reboredo

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer à minha futura esposa Fernanda de Souza Lobato Miguel, por ter me apoiado esse tempo todo, por ser a razão viva que me impulsiona a me superar em tudo o que faço; e aos meus pais, Gleice e Antonio, por todo o apoio e compreensão durante toda essa fase de estudos, por sempre me mostrarem a direção correta e por me permitirem percorrer livremente os caminhos desta ciência que hoje reside em meu coração, e que me acompanhará até o fim de minha vida.

Muito obrigado ao meu irmão Renan, por toda a admiração e respeito. Pelas conversas e discussões. Por todo o apoio e carinho que sem dúvida evidenciam nossa amizade eterna, que com certeza se estenderá ad infinitum.

Agradeço aos meus irmãos Andressa e Andrey pelo carinho, admiração e apoio durante esta tortuosa jornada intelectual.

Muito obrigado aos meus sogros, Sandra e Henrique, por todo o apoio e atenção; pelo exemplo de conduta que hoje suas histórias à mim representam.

Agradeço ao meu orientador, Dr. Éder Lima de Albuquerque, pela ajuda e orientação sobrecomum, sem as quais a realização deste trabalho se impossibilitaria. Pela eterna e incansável disposição em tirar dúvidas e pelo comportamento exemplar que reforçam seu elevado caráter e incontestável profissionalismo.

Obrigado à todos os amigos cúmplices de jornada, em especial ao Gustavo Gontijo e Felipe Albano, companheiros de projetos.

Obrigado aos professores Dr. Fábio Comes de Castro e Dr. José Alexander Araújo, pelas colaborações e importantes observações na composição final deste trabalho.

Obrigado à Universidade de Brasília e ao Departamento de Engenharia Mecânica pela oportunidade.

Rafaell Rocha Reboredo

RESUMO

O trabalho a seguir utiliza uma ferramenta computacional para modelar trincas em placas metálicas, utilizando o Método dos Elementos de Contorno e o Método dos Elementos de Contorno Dual. Inicialmente, são apresentados resultados para o fator de intensidade de tensão em modo de abertura usando a técnica da correlação de deslocamentos - fazendo uso de elementos quadráticos padrão, elementos de ponto a um quarto e elementos de ponto a um quarto com singularidade de tração - e a Integral J , comparando os resultados obtidos numericamente com resultados analíticos. Em seguida, é utilizado um algoritmo de propagação de trincas para simular exemplos para materiais isotrópicos que contemplam carregamento em modo misto, usando os fatores de intensidade de tensão em modo I e II para calcular o ângulo de propagação e o tamanho do incremento pelo Critério da Mínima Densidade de Energia de Deformação. A vida em fadiga é obtida através da integração da Lei de Paris, modificada pelo modelo de fechamento de trinca induzido por plasticidade. Os resultados numéricos são, por fim, comparados a dados experimentais disponíveis na literatura, o que acaba por validar o modelo numérico correspondente.

Palavras chaves: Método dos Elementos de Contorno, Mecânica da Fratura, Fadiga.

ABSTRACT

This work uses a tool to model problems of crack propagation in metallic plates, using the Boundary Element Method and its Dual form. On the first moment, the mode I stress intensity factor results are presented using the correlation displacement method - by means of quadratic element, quarter-point element and quarter-point element with traction singularity - and the J -integral. Then, a crack propagation algorithm is used to simulate examples for isotropic material under mixed fracture mode, using mode I and mode II stress intensity factors to calculate the propagation angle and the increment length using the Minimum Strain Energy Density Criterion. The fatigue life is obtained through the Paris Law integration, modified by the crack closure model. The numerical results are compared to the experimental data, validating the algorithm used in this study.

Key words: Boundary Element Method, Fracture Mechanics, Fatigue.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	Motivação.....	12
1.2	Panorama histórico das falhas mecânicas por fratura	13
2	MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	16
2.1	Introdução	16
2.2	Método dos Elementos de Contorno Dual.....	16
2.3	Formulação.....	17
3	MECÂNICA DA FRATURA	19
3.1	Introdução	19
3.2	Mecânica da Fratura Linear Elástica.....	21
3.2.1	Concentração de Tensões	21
3.2.2	O Critério da Energia de Griffith.....	22
3.2.3	A Equação de Griffith Modificada	25
3.2.4	Modos de Carregamento	26
3.2.5	Fator de Intensidade de Tensão	27
3.2.6	Campos de Tensões e Deslocamentos	30
3.3	Mecânica da Fratura Elasto-Plástica	32
3.3.1	Plastificação da Ponta da Trinca.....	32
3.3.2	A Integral J	34
3.4	Métodos Numéricos para o Cálculo do K_I	35
3.4.1	Elementos Quadráticos Padrão.....	36
3.4.2	Elementos de Ponto a um Quarto.....	37
3.4.3	Elementos de Ponto a um Quarto com Singularidade de Tração	39
3.4.4	Metodologia para a Determinação do K_I	40
3.4.5	Cálculo da Integral J	45
3.5	Resultados Numéricos para o Cálculo do K_I	47
3.5.1	Cálculo do K_I Usando Elementos Quadráticos Padrão.....	47
3.5.2	Cálculo do K_I Usando Elementos de Ponto a um Quarto.....	49
3.5.3	Cálculo do K_I Usando Elementos de Ponto a um Quarto com Singularidade de Tração	50
3.5.4	Cálculo do K_I Usando a Integral J	51

4	FADIGA DOS MATERIAIS	57
4.1	Introdução	57
4.2	Curva <i>S-N</i>	58
4.3	Curva <i>da/dN</i> x ΔK	61
4.3.1	Lei de Paris.....	61
4.3.2	Soluções Empíricas para Descrever o Crescimento de Trincas por Fadiga	64
4.4	Modelo de Fechamento de Trinca Induzido por Plasticidade.....	65
4.5	Estimativa de Vida em Fadiga.....	67
4.6	Métodos para Determinar a Direção da Propagação da Trinca	69
4.6.1	Critério da Máxima Tensão Circunferencial	69
4.6.2	Critério da Mínima Densidade de Energia de Deformação.....	72
5	PROPAGAÇÃO DE TRINCAS POR FADIGA COMPUTACIONAL.....	76
5.1	Introdução	76
5.2	Comentários sobre o Algoritmo Utilizado	77
5.2.1	Sobre o Código Principal do Algoritmo de Propagação	77
5.2.2	Sobre a Entrada de Dados	78
5.2.3	Sobre o Pós-processamento e os Resultados Fornecidos	79
5.3	Resultados Numéricos.....	80
5.3.1	Chapa com Trinca Inclinado a 45º	81
5.3.2	Chapa com Duas Trincas Horizontais	88
6	CONCLUSÕES.....	94
6.1	Sugestões para Trabalhos Futuros	95
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	97
	ANEXOS.....	99

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Falha de tanque em Boston, 1919.....	14
Figura 2. Colapso da Ponte Pleasant, Point Pleasant, 1967	15
Figura 3. Acidente com um Boeing 737 da <i>Aloha Airlines</i> , 1988.....	15
Figura 4. Curva de crescimento da trinca (Broek, 1982)	19
Figura 5. Entalhe elíptico em uma placa infinita (Sato, 2009)	21
Figura 6. Modelo de placa utilizado por Griffith em seus estudos (Sato, 2009)	23
Figura 7. Variação da resistência pelo comprimento de corpos de prova de vidro (Gdoutos, 2005)...	24
Figura 8. Modos de Carregamento: (a) Modo I, (b) Modo II e (c) Modo III. (Sato, 2009)	26
Figura 9. Sistemas de Coordenadas na Ponta da Trinca (Sato, 2009)	27
Figura 10. Trinca de borda em uma placa de largura W e comprimento infinito	29
Figura 11. Região elasto-plástica próxima à ponta da trinca (Janssen et al, 2005)	33
Figura 12. Representação da Integral J (Sato, 2009)	35
Figura 13. (a) elemento quadrático padrão e (b) elemento de ponto a um quarto	38
Figura 14. Vetor deslocamento fornecido pelo programa <i>ElastQuadratico.m</i>	41
Figura 15. Nós na vizinhança da ponta da trinca usando elementos de ponto a um quarto	42
Figura 16. Sistemas de Coordenadas na Ponta da Trinca (Sato, 2009)	43
Figura 17. Nós na vizinhança da ponta da trinca usando elementos quadráticos padrão	44
Figura 18. Distância do raio adotado para o cálculo da Integral J	45
Figura 19. Pontos internos para calcular a Integral J (Sato, 2009).....	47
Figura 20. Modelagem de um quarto na placa com carregamento no infinito	48
Figura 21. Abertura da trinca em detalhe	49
Figura 22. (a) Placa infinita com uma trinca central e (b) Abertura da trinca após a simulação	52
Figura 23. Gráfico de K_{norm} para trinca central em uma placa infinita	52
Figura 24. Abertura da trinca em detalhe (imagem gerada pelo programa <i>dual.m</i>).....	53
Figura 25. Placa contendo uma trinca de borda	55
Figura 26. Gráfico de K_{norm} para trinca de borda em uma placa infinita	55
Figura 27. Curva $S-N$ para o aço AISI 4340 temperado e revenido	59
Figura 28. Resistência à fadiga e resistência à tração para aços forjados (Bannantine et al., 1990)....	60
Figura 29. Curva $S-N$ para metais forjados em grade log-log (Bannantine et al., 1990)	61
Figura 30. Comportamento típico da propagação de trincas por fadiga em metais (Sato, 2009).....	62
Figura 31. Tamanho da trinca por número de ciclos para carregamento cíclico constante	67
Figura 32. Fluxograma para o algoritmo de propagação (Sato, 2009).....	80
Figura 33. Geometria da chapa trincada (todas as dimensões em mm)	81
Figura 34. Geometria e condições de contorno do problema gerados pelo programa.....	82
Figura 35. Perfil interpolado para a trinca após a propagação	85
Figura 36. Comparação dos resultados para vida em fadiga usando diferentes abordagens	86
Figura 37. Comparação entre o resultado numérico e experimental da vida em fadiga para a ponta A com trinca inclinada a 45°	87
Figura 38. Comparação entre o resultado numérico e experimental da vida em fadiga para a ponta B com trinca inclinada a 45°	87
Figura 39. Características geométricas do problema de dois entalhes horizontais.....	89
Figura 40. Geometria com perfil interpolado após propagação	89

Figura 41. Comparação entre o resultado numérico e experimental da vida em fadiga para as pontas A e D	92
Figura 42. Comparação entre o resultado numérico e experimental da vida em fadiga para as pontas B e C.....	92

LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Deslocamentos dos seis primeiros nós da placa	48
Tabela 2. Deslocamento dos seis primeiros nós da placa (ponto a um quarto)	50
Tabela 3. Pontos usados para a construção dos gráficos da Fig. (23)	54
Tabela 4. Pontos usados para a construção dos gráficos da Fig. (26)	56
Tabela 5. Tamanho dos incrementos para as pontas A e B da trinca durante a propagação.....	83
Tabela 6. Valores de K_I e K_{II} para a ponta A da trinca durante a propagação	83
Tabela 7. Valores de K_I e K_{II} para a ponta B da trinca durante a propagação	83
Tabela 8. Valores de K_{eq} para as pontas A e B da trinca durante a propagação.....	84
Tabela 9. Valores para os ângulos de propagação em graus	84
Tabela 10. Tamanho dos incrementos para as pontas A, B, C e D das trincas durante a propagação .	90
Tabela 11. Valores de K_I e K_{II} para a ponta A da trinca durante a propagação	90
Tabela 12. Valores de K_I e K_{II} para a ponta B da trinca durante a propagação	90
Tabela 13. Valores de K_I e K_{II} para a ponta C da trinca durante a propagação	90
Tabela 14. Valores de K_I e K_{II} para a ponta D da trinca durante a propagação	91
Tabela 15. Valores de K_{eq} para as pontas A, B, C e D das trincas durante a propagação	91
Tabela 16. Valores para os ângulos de propagação em graus de todas as pontas de trinca.....	91

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

b_i	Vetor de forças de corpo	[N]
E	Módulo de Elasticidade	[Pa]
u_i	Vetor deslocamento	[mm]
t_i	Vetor força de superfície	[N]
W	Densidade de energia de deformação	
G	Taxa de alívio de energia potencial	
K	Fator de intensidade de tensão	
a	Tamanho do incremento de propagação da trinca	
J	Valor obtido pela Integral J	

Símbolos Gregos

σ_{ij}	Tensor de tensões
ε_{ij}	Tensor de deformações
λ	Constante de Lamé
μ	Módulo de cisalhamento
ν	Razão de Poisson
Γ	Contorno do problema
δ_{ij}	Delta de Kronecker
κ	Constante elástica do material
Π	Energia potencial
θ	Ângulo de propagação da trinca

Siglas

MEC	Método dos Elementos de Contorno
MECD	Método dos Elementos de Contorno Dual
MEF	Método dos Elementos Finitos
ISO	International Organization for Standardization
MTC	Método da Máxima Tensão Circunferencial
MDED	Método da Mínima Densidade de Energia de Deformação

1 INTRODUÇÃO

1.1 Motivação

No princípio do desenvolvimento tecnológico, as técnicas utilizadas e o conhecimento teórico acerca da fabricação de materiais metálicos eram rudimentares, o que contribuía para o encarecimento de qualquer projeto que fizesse uso desses; no século XIII, por exemplo, as expensas de uma armadura completa para cavalo e cavaleiro equiparava ao custo de uma unidade do blindado inglês Centurion, usado na Segunda Guerra Mundial (Broek, 1982).

Conforme a tecnologia foi se desenvolvendo, a aplicabilidade na utilização dos metais foi crescendo e, com ela, surgiram inúmeras falhas estruturais que tiveram de ser estudadas a fim de que a vida desses materiais fosse prolongada ao máximo, e o custo na respectiva reposição dos mesmos, reduzido. A utilização teve seu auge com a Revolução Industrial, principalmente em sua fase expansionista, no século XIX. Com a mudança de paradigma que tornava quase extinta a produção artesanal, houve a necessidade de se criar um novo modelo logístico que conseguisse escoar a produção em larga escala com eficiência. Foi então que as ferrovias começaram a surgir. Na Grã Bretanha, berço da Revolução, inúmeros acidentes relacionados à construção de vias-férreas foram registrados na época, visto que o conhecimento sobre Mecânica da Fratura era extremamente limitado. Uma parcela desses acidentes era consequência de projetos falhos, mas algumas outras causas consideram as imperfeições decorrentes dos processos de fabricação dos materiais utilizados no passado, e o fato de tais defeitos estarem relacionados com o início de trincas e processos de fratura em elementos mecânicos. Foi necessária, então, uma melhoria nos processos de fabricação em concomitância com o desenvolvimento intelectual no sentido de compreender o comportamento dos materiais, para que finalmente o número de desastres fosse reduzido para uma quantidade aceitável.

Embora a presença de trincas não seja algo que possa ser evitado, há uma urgência cada vez mais crescente de se projetar estruturas com fator de segurança menor, ou seja, otimizadas (mais baratas, mas, ainda sim, resistentes). Torna-se necessário, então, estudar como essas imperfeições estruturais crescem, para que possamos intuir o momento exato de realizar a manutenção necessária da peça trincada, evitando a falha estrutural e o desperdício econômico.

1.2 Panorama histórico das falhas mecânicas por fratura

As falhas devido à fratura têm sido um problema recorrente na história da humanidade. Conforme avançamos tecnologicamente, o fenômeno se faz ainda mais presente e perigoso – tendo em vista que os projetos de engenharia se tornam cada vez mais complexos. Antes mesmo das descobertas de Poisson, Lamé, Saint-Venant e Navier no campo da resistência dos materiais, no início do século XVIII, DaVinci e Galileu já haviam conduzido experimentos responsáveis por investigar a resistência mecânica de diferentes materiais, ainda no século XV, sendo que a este último atribui-se a autoria do termo “resistência à fratura”. Isso demonstra a tentativa constante de compreender o que exatamente leva um elemento mecânico a falhar.

Formalmente, o projeto de engenharia preocupa-se em impedir falhas mecânicas por colapso plástico. Para um projeto estático, o parâmetro que irá definir o fator de segurança de projeto é o limite de escoamento do material. Do ponto de vista de carregamento cíclico, faz-se necessário projetar utilizando um dos três Métodos da Vida sob Fadiga. O objetivo desses métodos é prever a vida, em número de ciclos, até a ocorrência da falha, considerando um carregamento específico (Shigley, Mischke e Budynas, 2005). Os dois primeiros – *Fadiga em alto ciclo ou fadiga controlada por tensões cíclicas* e a *Fadiga em baixo ciclo ou fadiga controlada por deformações cíclicas* – não consideram a possibilidade de existir uma imperfeição no material, ou seja, uma trinca, que sob carregamentos cíclicos, pode vir a se propagar continuamente; para esse caso, cabe à formulação de *Propagação de trincas por fadiga* avaliar a vida de peças que já possuem fissuras.

A fratura por fadiga ocorre quando um elemento é submetido a esforços cíclicos, cuja magnitude pode ser variável, e que levará à propagação de uma trinca já pertencente, interna ou externamente, à estrutura. A geometria e o carregamento influenciam de maneira significativa a fadiga, sendo esses os principais parâmetros passíveis de serem manipulados em projeto. A propagação de trincas por fadiga pode levar a falhas catastróficas em forma de fraturas súbitas, chamadas frágeis. Cabe então à Mecânica da Fratura determinar se uma imperfeição tipo trinca levará um componente à fratura calamitosa, estando essa submetida a tensões normais de serviço.

Embora a fratura frágil não seja um fenômeno de falha tão comum quanto a fadiga e a flambagem, existem registros de falhas catastróficas à fratura frágil desde o século XIX até os tempos atuais. Fratura frágil é um tipo de falha mecânica que ocorre independentemente de deformação plástica prévia do material; é de natureza fulminatória e caracteriza-se pela formação de uma superfície de fratura plana (clivagem).

Shank (1953) e Parker (1957) publicaram uma série de registros de falhas estruturais por fratura frágil no final do século XIX, quando membros da *British Iron and Steel Institute* reportaram fraturas desse tipo no aço.

Em Boston, 15 de janeiro de 1919, a estrutura de um tanque contendo mais de dois milhões de galões de melaço falhou, afogando 12 pessoas e ferindo outras 40 (Figura 1).



Figura 1. Falha de tanque em Boston, 1919. (<<http://edp.org/molasses.htm>>, acesso em 14/09/2012)

Uma nova era de acidentes veio com o advento da soldagem, no final da primeira metade do século XX. Inúmeras pontes falharam por fratura frágil naquele período. A natureza das falhas estruturais contemplava um regime brando de carregamento, em baixas temperaturas, com falhas súbitas cujo início se dava na parte soldada. Muitos estudos nessa área foram iniciados, embora não houvesse grande preocupação por parte da indústria em entender o motivo desses acidentes até o colapso da Ponte Pleasant em Point Pleasant, West Virginia, 15 de dezembro de 1967 (Barsom & Rolfe, 1977), ilustrado na Fig. 2. As pesquisas indicaram que defeitos no material e concentradores de tensão eram alguns dos causadores das falhas.

Um registro mais recente de acidente por propagação de trinca à fadiga que vale ser citado é do voo 243 da *Aloha Airlines* em 1988, onde parte da fuselagem de um Boeing 737 se soltou em pleno ar (Figura 3).

Em projetos modernos, a fratura junto à propagação de trincas por fadiga é comum em elementos de máquina com geometria complexa, que inevitavelmente exibem concentradores de tensão e se encontram sob esforço cíclico intenso, como virabrequins, bielas de pistão e outros tipos de eixos motores e pinos.



Figura 2. Colapso da Ponte Pleasant, Point Pleasant, 1967. (<<http://www.herald-dispatch.com>>, acesso em 14/09/2012)



Figura 3. Acidente com um Boeing 737 da Aloha Airlines, 1988. (<<http://www.airdisaster.com>>, acesso em 15/09/2012)

A Mecânica da Fratura tenta, portanto, prever quando que uma trinca pode vir a causar falhas mecânicas, permitindo ao engenheiro projetar com mais segurança e viabilidade econômica. O presente trabalho tem por finalidade estudar a propagação de trincas por fadiga fazendo uso das teorias da Mecânica da Fratura Linear Elástica e Fadiga em conjunto com a formulação do Método dos Elementos de Contorno, assuntos estes abordados ao longo do presente documento.

2 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

2.1 Introdução

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) se desenvolveu consideravelmente desde seu surgimento, e hoje representa um substituto ideal ao Método dos Elementos Finitos (MEF) em problemas que contemplam concentradores de tensão ou domínios que se estendem ao infinito (Brebbia & Dominguez, 1992), o primeiro comumente encontrado em análises de Mecânica da Fratura. Nesses exemplos, o MEC tem se mostrado superior, exibindo melhor precisão aliado a um menor custo computacional.

A principal diferença acerca de ambas as formulações é que enquanto o MEF necessita de uma discretização de domínio – com elementos de volume no caso de problemas 3D – e com uma malha ligeiramente mais refinada, o MEC exhibe a mesma ordem de precisão diante de uma discretização mais grosseira, tendo de considerar apenas o contorno, ou, no caso tridimensional, utilizar elementos de superfície. Assim, implementar o código de elementos de contorno em conjunto com geradores de malha torna-se um exercício mais simples, no qual corriqueiras mudanças na geometria do problema não implicam em uma consequente remodelagem da malha.

O MEC utiliza em sua formulação os conceitos matemáticos do delta de Dirac, o teorema de Gauss-Green e o teorema da Divergência, com o intuito de manipular as equações diferenciais governantes e convertê-las em equações integrais equivalentes. O método necessita ainda das chamadas soluções fundamentais para converter as equações integrais em *equações integrais de contorno*, bem como a precisa determinação das condições de contorno do problema.

2.2 Método dos Elementos de Contorno Dual

Em 1971, Cruse & Buren aplicaram pela primeira vez o Método dos Elementos de Contorno a problemas de Mecânica da Fratura, obtendo resultados razoáveis no cálculo dos fatores de intensidade de tensão (Sato, 2009). Entretanto, os pesquisadores se depararam com uma degeneração matemática da formulação para situações nas quais as faces da trinca jaziam em mesmo plano. Dessa forma, as primeiras simulações contemplavam a modelagem de apenas uma parte do objeto trincado, limitando a abordagem a problemas simétricos.

Várias alternativas foram propostas para resolver o problema das faces coplanares, mas foi apenas em 1992 que Portela et al. desenvolveram o chamado Método dos Elementos de Contorno Dual (MECD). Ao contrário das abordagens anteriores, que utilizavam a formulação de multi-regiões, o MECD utiliza uma única região e aproveita a singular característica do Método dos Elementos de Contorno – a modelagem apenas do contorno; isso permite a inserção de novos elementos na mesma malha, conforme a trinca for se propagando, característica essa ideal, tendo em vista a natureza dos problemas de Fratura. A não obrigatoriedade no remodelamento da malha constitui uma grande vantagem do MECD se comparado ao MEF.

Neste trabalho, a estratégia de modelar parte de um objeto trincado, aproveitando sua simetria, será estudada através do programa *ElastQuadratico.m*. A modelagem de toda a peça seguirá a formulação do MECD, sendo investigada através do algoritmo de propagação intitulado *dual.m*. Ambos foram desenvolvidos em MatLab® e implementados pelo Professor Dr. Éder Lima de Albuquerque.

2.3 Formulação

A formulação do Método dos Elementos de Contorno aplicado à elasticidade plana deve inicialmente definir a equação para o equilíbrio de forças e momentos. A dedução das equações apresentadas a seguir foi suprimida tendo em vista que uma demonstração mais aprofundada do MEC fugiria do escopo deste trabalho, uma vez que a implementação do método não é o objetivo deste estudo. As equações para o equilíbrio de forças e momentos, bem como a relação constitutiva enunciada a seguir, servem apenas como uma breve introdução às relações dispostas nas Equações (5) e (6). Informações mais detalhadas sobre a formulação do MEC aplicado à elasticidade plana podem ser encontradas em Brebbia (1992), Kane (1994) e Katsikadelis (2002).

Utilizando a notação indicial, o equilíbrio de forças de um elemento infinitesimal dentro de um domínio Ω pode ser expresso através da Eq. (1) (Brebbia, 1992).

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0, \quad (1)$$

na qual i e j denotam as coordenadas cartesianas, σ_{ij} é o tensor de tensões e b_i é o vetor de forças de corpo. O equilíbrio de momentos será da forma:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (2)$$

A sequência da formulação elástica linear define o vetor de forças de superfície t_i , bem como o tensor de deformações, que originará uma relação com o tensor de tensões em uma equação constitutiva (Equação 3).

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ji}. \quad (3)$$

As chamadas constantes de Lamé, λ e μ , dependem do módulo de elasticidade E e da razão de Poisson ν .

A formulação integral de contorno definirá equações governantes com base numa função vetorial contínua chamada função peso residual (u_k^*), que representa o deslocamento de um estado elastostático em um dado domínio Ω . Dessa forma, escrevemos (Brebbia, 1992):

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) u_k^* d\Omega = 0. \quad (4)$$

Manipulando a equação acima e finalmente utilizando o Teorema de Gauss-Green para transformar integrais de domínio em integrais de contorno, temos a equação integral de contorno para deslocamentos e forças de superfície, dados, respectivamente, por (Sato, 2009):

$$c_{ij}(x') u_j(x') + \int_{\Gamma} t_{ij}^*(x', x) u_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(x', x) t_j(x) d\Gamma(x), \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} t_j(x') n_i(x') \int_{\Gamma} S_{kij}(x', x) u_k(x) d\Gamma(x) = n_i(x') \int_{\Gamma} D_{kij}(x', x) t_k(x) d\Gamma(x), \quad (6)$$

nas quais Γ corresponde ao contorno; c_{ij} denota uma constante de integração proporcional ao ângulo entre duas superfícies (com o valor de $1/2 \delta_{ij}$ para contornos suaves, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker); u_j e t_j denotam deslocamentos e forças de superfícies nodais, respectivamente; t_{ij}^* e u_{ij}^* denotam as soluções fundamentais para tração e deslocamento para o ponto x , respectivamente; x e x' são denominados pontos campo e fonte, respectivamente (a distância entre eles é denotado por r); n_i denota a normal unitária externa ao contorno do ponto fonte; S_{kij} e D_{kij} representam as derivadas das soluções fundamentais (Sato, 2009). As expressões para as soluções fundamentais supracitadas encontram-se abaixo (Sato, 2009):

$$t_{ij}^* = \frac{-dr/dn [(1 - 2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}] + (1 - 2\nu)(n_i r_{,j} - n_j r_{,i})}{4\pi r(1 - \nu)}, \quad (7)$$

$$u_{ij}^* = \frac{-(3 - 4\nu)\delta_{ij} \ln(r) + r_{,i}r_{,j}}{8\pi G(1 - \nu)}, \quad (8)$$

na qual G é o módulo de elasticidade transversal (módulo de Coulomb).

As Equações (5) e (6) constituem a base da formulação do Método dos Elementos de Contorno Dual. O MECD aplica cada uma dessas equações em uma superfície diferente da trinca; embora o caminho de propagação permaneça o mesmo, a aplicação de duas equações integrais de contorno distintas e linearmente independentes resolve o problema causado pelos pontos fonte com coordenadas coincidentes nas faces da trinca. Tal estratégia constituirá o procedimento para tratar o problema de propagação de trincas em um único domínio.

3 MECÂNICA DA FRATURA

3.1 Introdução

Objetivamente falando, a Fratura pode ser definida como um processo de formação de novas superfícies no material. Do ponto de vista microscópico, novas superfícies são formadas devido à quebra das ligações interatômicas no sólido, podendo ainda ser classificada em cinco tipos distintos: clivagem, quase clivagem, alveolar, intergranular e de fadiga. Já do ponto de vista macroscópico, a Fratura pode ser vista como sendo a separação da superfície de um sólido em uma ou mais partes resultando no aparecimento de trincas que crescem diante de um carregamento, sendo classificada em dúctil, frágil ou ainda dúctil-frágil.

Considere uma trinca se propagando em uma estrutura. Ela crescerá com o tempo frente à aplicação de cargas e diante de reações a fatores ambientais (Figura 4). Quanto maior a trinca, maior o concentrador de tensão relacionado, o que implicará diretamente no aumento da taxa de propagação da trinca, diminuindo, por consequência, a resistência mecânica do material em questão.

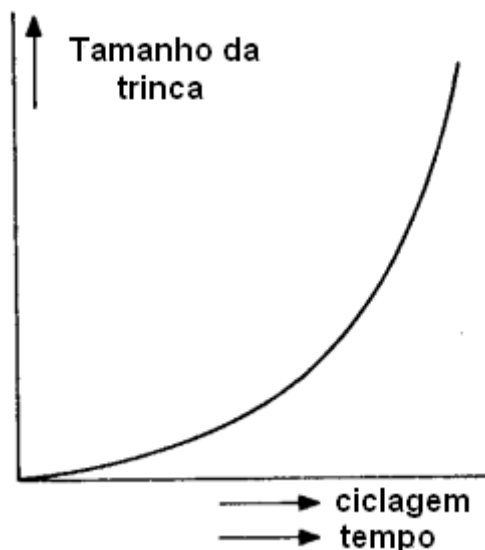


Figura 4. Curva de crescimento da trinca (Broek, 1982)

Diante de tal problemática, a Mecânica da Fratura surge para responder questões que contemplam as implicações mecânicas desse tipo de falha estrutural; questionamentos do tipo (Broek, 1982):

- a) Qual seria o tamanho crítico de uma trinca submetida a cargas normais de serviço?
- b) Quanto tempo leva para, uma vez aplicadas tais cargas, a trinca crescer até seu tamanho crítico?
- c) Quantas vezes uma estrutura deve ser inspecionada para que a segurança seja sempre mantida?

O início das pesquisas no campo da Fratura começou com Leonardo da Vinci, ainda no século XV, com investigações que proporcionaram pistas sobre a causa primordial do problema de propagação de trincas. Leonardo mediu a resistência de fios de aço e descobriu que tal propriedade comportava-se de forma inversamente proporcional ao tamanho do fio - o chamado “efeito do comprimento”, uma característica importante em Fratura. Tais resultados, ainda que qualitativos, implicaram na conclusão de que fios maiores significavam uma maior probabilidade de conter uma falha, ou seja, trincas no material se relacionam diretamente com a resistência mecânica do sólido.

Foi apenas cinco séculos depois que os primeiros resultados quantitativos surgiram. Em 1907, Wieghardt¹ desenvolveu uma pesquisa responsável pela detecção da existência de singularidade das tensões em problemas de propagação de trincas, fornecendo a solução para essa questão (Sato, 2009). Em 1913, Inglis determinou a magnitude do concentrador de tensões em análise a entalhes elípticos em placas planas. Finalmente em 1920, Griffith conduziu uma pesquisa na qual se aplicou uma análise de tensão do mesmo furo elíptico (estudado por Inglis sete anos antes) a uma propagação instável de trinca. Usando a Primeira Lei da Termodinâmica, Griffith foi capaz de formular uma teoria que resolvia o problema ao fazer uso de um simples balanço de energia – a base da teoria moderna.

Após o término da Segunda Guerra Mundial, a teoria de Griffith foi expandida por outros pesquisadores da área, entre eles, o líder do grupo de estudo de Mecânica da Fratura do Laboratório de Pesquisa Naval americano, o Dr. G. R. Irwin. A primeira grande contribuição do pesquisador americano foi aplicar a abordagem vista no Método de Griffith aos metais, incluindo a dissipação de energia da deformação plástica local ao balanço energético proposto anteriormente. Nesse mesmo período vale citar as contribuições de outros pesquisadores, como Orowan e Mott, cujos trabalhos são citados com mais detalhes em Anderson (1995).

Em 1956, Irwin apresentou outra alternativa ao modelo de Griffith utilizando uma abordagem mais conveniente à análise de engenharia, a chamada *taxa de alívio de energia potencial*. No ano seguinte, Irwin aproveitou um artigo publicado por Westergaard¹ em 1938 para mostrar que os deslocamentos e as tensões próximas à ponta da trinca estavam relacionados por uma única constante; tal parâmetro ficou conhecido posteriormente como fator de intensidade de tensão.

¹ 'Bearing pressures and cracks', *Journal of Applied Mechanics*, Trans. ASME 6, A.49-A.53.

Assumindo que haja uma trinca no material - hipótese primordial previamente estabelecida pela Mecânica da Fratura - existem duas formas pelas quais uma estrutura pode vir a colapsar. A primeira delas assume uma solicitação atípica e pontual; já a outra hipótese prevê a atuação de esforços cíclicos, cujas frequências e amplitudes podem ser variáveis, o que caracteriza o fenômeno de Fadiga. A aplicação da metodologia de Mecânica da Fratura a problemas de fadiga foi desenvolvido pela primeira vez em 1960, por Paris & Erdogan. Embora tenha sido apenas em 1961 que Paris et al. conseguiram demonstrar que a constante física que controlava a propagação de trincas era o fator de intensidade de tensões, proposto por Irwin cinco anos antes.

Os tópicos que se seguem discorrem mais aprofundadamente sobre os trabalhos dos pesquisadores supracitados, apresentando os fundamentos da Mecânica da Fratura. As descobertas de Paris et al. serão tratadas apenas na segunda parte deste trabalho, após a apresentação das teorias que tratam do fenômeno de Fadiga dos Materiais.

3.2 Mecânica da Fratura Linear Elástica

3.2.1 Concentração de Tensões

Embora as pesquisas no campo da Mecânica da Fratura tenham começado com alguns experimentos realizados por Leonardo da Vinci no século XV, o primeiro pesquisador a propor um modelo matemático consistente ao problema de propagação de trincas foi Inglis, em 1913; e foi a partir dessa pesquisa que tal disciplina se desenvolveu.

Inglis propôs o estudo de uma placa que abriga um furo elíptico dentro de seus limites, cujas dimensões são infinitamente menores que as próprias dimensões da placa. Um carregamento no infinito no sentido de tracioná-la é aplicado, como observado na Fig. 5.

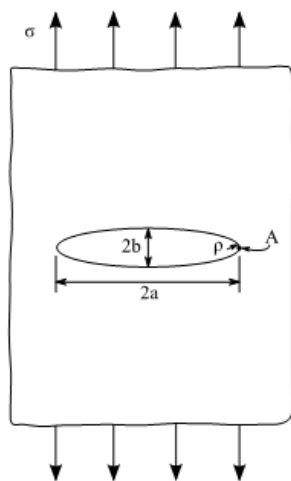


Figura 5. Entalhe elíptico em uma placa infinita (Sato, 2009)

A pesquisa revelou que nas extremidades do furo - onde o raio de curvatura é o menor possível - existe uma concentração de tensões. Inglis traduziu tal conceito em uma equação para as tensões nessa extremidade (Equação 9).

$$\sigma_A = \sigma \left(1 + \frac{2a}{b} \right), \quad (9)$$

na qual σ_A denota as tensões no ponto A da Fig. 5.

Em análise à equação acima é possível inferir que quanto maior for o parâmetro denotado pela letra a em relação à altura b , mais próximo de uma trinca aguda a elipse se aproxima. Dessa forma, é mais conveniente reescrevermos tal expressão em função do raio de curvatura.

$$\sigma_A = \sigma \left(1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right), \quad (10)$$

na qual $\rho = b^2/a$ é o raio de curvatura da elipse.

Na situação específica em que o raio de curvatura tender ao valor nulo, o furo representará uma trinca cujas tensões em suas extremidades tenderão, por sua vez, a valores extremamente altos. Nesse caso, é possível concluir que tal modelo não representa de forma precisa o comportamento físico dos materiais, já que, caso o fizesse, a simples presença de trincas representariam a falha mecânica em última instância, estabelecendo, inclusive, a condição de sinônimos a tais termos. É evidente que nenhum material suporta tensões que tendem ao infinito, e foi exatamente sobre essa discrepância física que Griffith centrou sua pesquisa, a ser discutida no tópico seguinte.

3.2.2 O Critério da Energia de Griffith

O balanço energético realizado por Griffith é considerado por muitos autores o início dos estudos de Mecânica da Fratura. A pesquisa trabalha sob a hipótese de que o crescimento de uma trinca ocorre quando a energia disponível para sua propagação é *suficiente para superar* a resistência do material em análise. Tal resistência tem de incluir a energia para formar novas superfícies, o trabalho plástico relacionado ou qualquer outro tipo de dissipação associada com a propagação da respectiva trinca (Anderson, 1995).

Em 1921, Griffith publicou seu trabalho pioneiro, intitulado “*The Phenomena of Rupture and Flow in Solids*”, no qual foi proposto que a propagação de trincas, como qualquer fenômeno físico, só poderia ocorrer se obedecesse à Primeira Lei da Termodinâmica. Nesse artigo o pesquisador conseguiu explicar o crescimento de uma trinca fazendo uso de um balanço energético, cujas equações demonstraram claramente o efeito do tamanho das trincas nos sólidos.

Utilizando a solução obtida por Inglis, Griffith conseguiu obter a tensão de fratura de uma placa trincada como sendo inversamente proporcional à raiz quadrada do comprimento da respectiva trinca. Sendo assim, o pesquisador propôs uma solução ao paradoxo da teoria anterior, que afirmava que a resistência mecânica do corpo de prova independia do tamanho da trinca nele contida.

Griffith realizou diversos experimentos utilizando corpos de prova no formato de tubos circulares e bulbos esféricos - ambos trincados e fabricados com fibra de vidro, um material frágil - cuja trinca em seu domínio possuía $2a$ de comprimento por B de espessura, como ilustrado na Fig. 6 (para uma formulação teórica levemente destoante da prática, embora ainda pertinente).

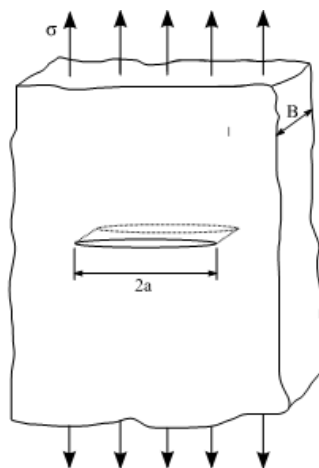


Figura 6. Modelo de placa utilizado por Griffith em seus estudos (Sato, 2009)

Os experimentos de Griffith seguiram a metodologia utilizada previamente pelo Laboratório de Pesquisa Naval americano - responsável por investigar a resistência mecânica de corpos de prova constituídos de fibra de vidro. Essa primeira pesquisa demonstrou o decréscimo do logaritmo da resistência média do vidro como uma função do logaritmo do comprimento do sólido (Figura 7), o que acabou por corroborar com as pesquisas de Leonardo da Vinci séculos antes (Gdoutos, 2005).

No gráfico da Fig. 7, a curva superior representa os corpos de prova cuja fabricação foi mais rigorosa, atentando para a prevenção máxima de imperfeições em suas estruturas; a curva inferior expressa os resultados de sólidos que continham inúmeras falhas. A explicação desse fenômeno advoga sob a tese de que todo o material possui imperfeições, e que essas são responsáveis diretamente pela redução da resistência do material que as contém. Estatisticamente falando, há mais chances de um volume maior conter mais falhas desse tipo; muito embora tenha sido apenas com os trabalhos de Griffith que o efeito de tamanho fora estudado de forma mais aprofundada, tendo sido apresentado uma metodologia plausível que explicasse tal efeito.

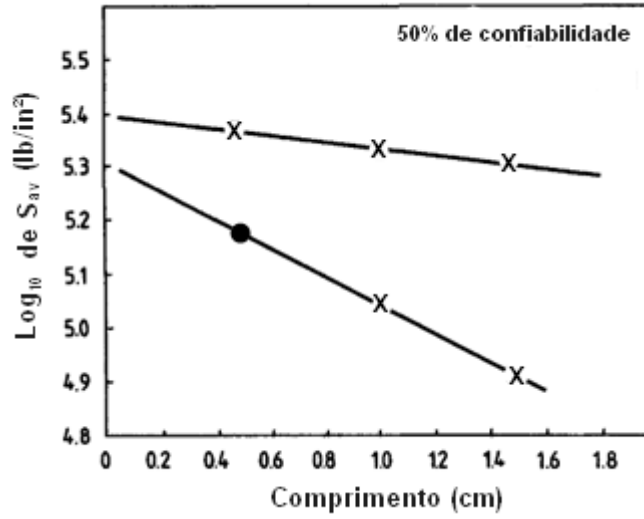


Figura 7. Gráfico log x log da variação da resistência pelo comprimento de corpos de prova de fibra de vidro (Gdoutos, 2005)

Motivado pelo fato de que os corpos de prova apresentavam a ruptura sob cargas nominais muito menores que as previstas pela teoria, o pesquisador iniciou sua investigação. Segundo ele, em materiais idealmente frágeis, a trinca cresceria de forma instável, caso a energia de deformação liberada pelo próprio avanço da fissura de um elemento infinitesimal de material fosse maior que a energia de superfície absorvida para esse pequeno incremento (Sato, 2009). Finalmente, o balanço energético de Griffith considera a mesma placa infinita proposta por Inglis (Figura 6). Assim, para um incremento de trinca dA , tem-se:

$$\frac{dE_T}{dA} = \frac{d\Pi}{dA} + \frac{dW_S}{dA} = 0, \quad (11)$$

na qual E_T denota a energia total do sistema, Π representa a energia potencial do corpo e W_S é a energia de formação de novas superfícies.

Griffith ainda expressou as grandezas que equacionam a energia potencial e a energia de formação, dispostas abaixo.

$$\Pi = \Pi_0 - \frac{\pi\sigma^2 a^2 B}{E}, \quad (12)$$

na qual Π_0 denota a energia potencial do sólido sem trinca.

$$W_S = 2(2aB\gamma_S), \quad (13)$$

na qual γ_S é a energia elástica de superfície do material.

Substituindo as Equações (12) e (13) na Eq. (11), temos a tensão de fratura para materiais idealmente frágeis:

$$\sigma_f = \left(\frac{2E\gamma_S}{\pi a} \right)^{1/2}, \quad (14)$$

na qual σ_f denota a tensão de fratura.

Embora a Eq. (14) constitua uma solução particular, Griffith ainda foi capaz de expandir seu teorema de forma a contemplar o momento crítico onde ocorre a fratura no sólido, generalizando sua formulação (Gdoutos, 2005).

3.2.3 A Equação de Griffith Modificada

Embora o Critério de Griffith discorrido do tópico anterior tenha representado um grande salto na formulação matemática de problemas de propagação de trincas, suas equações ainda atuavam sob uma restrição no que concerne o tipo de material. Considerando que os experimentos pensados para estudar o fenômeno físico em questão tenha somente utilizado o vidro como material para a fabricação dos corpos de prova, a teoria de Griffith, portanto, equacionava apenas o comportamento de materiais idealmente frágeis, subestimando assim, o fenômeno de fratura em materiais dúcteis. Foi apenas em 1948 que Irwin e Orowan modificaram a Eq. (14) atentando para a consideração de *metais* capazes de realizar deformação plástica (Anderson, 1995). A expressão supracitada é dada por:

$$\sigma_f = \left(\frac{(2E\gamma_s + \gamma_p)}{\pi a} \right)^{1/2}, \quad (15)$$

na qual γ_p denota o trabalho plástico por unidade de área de superfície criada, e γ_s representa a energia total responsável por quebrar as ligações intermoleculares do sólido.

A Eq. (15) ainda pode ser generalizada para contemplar outros materiais, que não metais em exclusivo. Assim, enuncia-se:

$$\sigma_f = \left(\frac{2Ew_f}{\pi a} \right)^{1/2}, \quad (16)$$

na qual w_f denota a energia de fratura, podendo incluir efeitos plásticos, viscoelásticos e viscoplásticos, dependendo do material estudado.

Em seu trabalho de 1956, Irwin propôs o conceito nomeado Taxa de Alívio de Energia Potencial, G , um parâmetro mais conveniente para a análise de engenharia, e que representa o montante de energia necessário para a trinca crescer, sendo absorvida por ela para provocar tal propagação.

$$G = - \frac{d\Pi}{dA}. \quad (17)$$

Embora o parâmetro acima seja referenciado como “taxa”, é importante salientar que a derivada não diz respeito a uma mudança no tempo; $d\Pi$ varia com relação à área da trinca. Para a placa ilustrada na Fig. 6, o parâmetro G pode ser reescrito na forma:

$$G = - \frac{\pi \sigma^2 a}{E}. \quad (18)$$

A equação anterior servirá para a dedução do Fator de Intensidade de Tensões, a ser comentado posteriormente.

3.2.4 Modos de Carregamento

Dois anos mais tarde de Irwin apresentar sua equação para o parâmetro G (Equação 18), o pesquisador deduziu, fazendo uso da teoria da elasticidade, a distribuição de tensões próxima à ponta da trinca, associada com três modos de carregamento distintos, apresentados a seguir.

Os modos de carregamento são classificados de acordo com o movimento exercido pela superfície superior com relação à inferior, separadas pela trinca que tende a se propagar, dado o movimento de ambas as faces, de acordo com a Fig. 8.

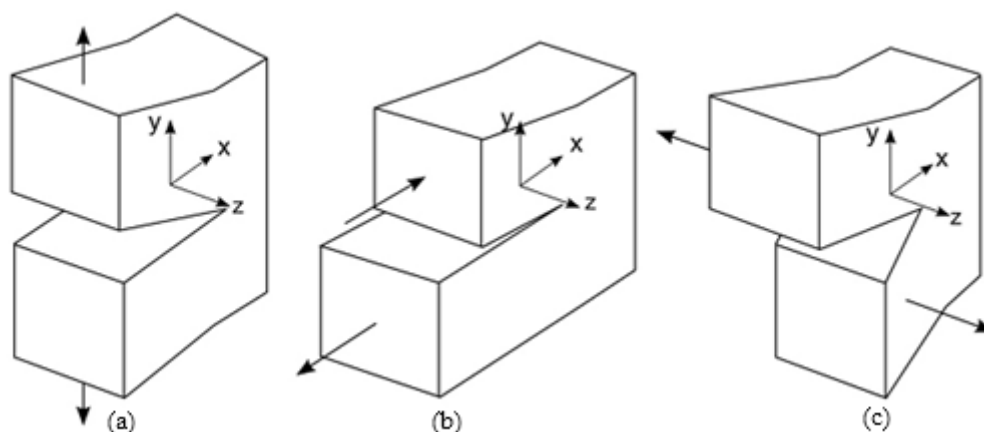


Figura 8. Modos de Carregamento: (a) Modo *I*, (b) Modo *II* e (c) Modo *III*. (Sato, 2009)

A Fig. 8 expressa um corpo com uma trinca plana e um sistema de coordenadas fixo exatamente à ponta da trinca, na medida em que suas faces estejam sobre o plano x - z , sendo paralelas ao eixo x e ortogonais à z .

No caso de uma carga ser aplicada paralelamente ao eixo y (Figura 8a), teremos o chamado modo *I* (modo de abertura ou tração); O modo *II* (modo de cisalhamento) é caracterizado por um carregamento aplicado paralelamente ao eixo x (Figura 8b); já o modo *III* (modo de torção) acontece na situação em que o carregamento for aplicado paralelamente ao eixo z (Figura 8c).

Observa-se que em modo *I*, a separação dos planos que contemplam a trinca (planos x - y e x - z) acontece de forma simétrica. Em modo *II*, a simetria só ocorre no deslizamento do plano x - y , procedendo antissimetricamente frente à desunião do plano x - z . Finalmente em modo *III*, ambos os planos supracitados separam-se de forma antissimétrica.

Diz-se que o problema é plano se as equações para o deslocamento e forças de superfície forem funções apenas das direções x e y . Define-se modo misto a situação em que há a combinação de mais de um dos modos apresentados acima, na qual a solução final será dada através da superposição das soluções particulares, constatada a linearidade das equações governantes do problema.

3.2.5 Fator de Intensidade de Tensão

Westergaard publicou um artigo em 1939 que continha uma expressão para o campo de tensões na vizinhança de uma trinca de comprimento $2a$, carregada em modo *I* puro, considerando um material isotrópico de comportamento linear elástico:

$$\sigma_{ij} = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} f_{ij}(\theta), \quad (19)$$

na qual $f_{ij}(\theta)$ é uma função da coordenada polar θ . Aqui podemos observar que a Eq. (19) define o campo de tensões como sendo função da tensão σ aplicada ao corpo, da dimensão da trinca e das coordenadas polares acima definidas (r e θ) em relação à direção da ponta da trinca, conforme ilustra a Fig. 9.

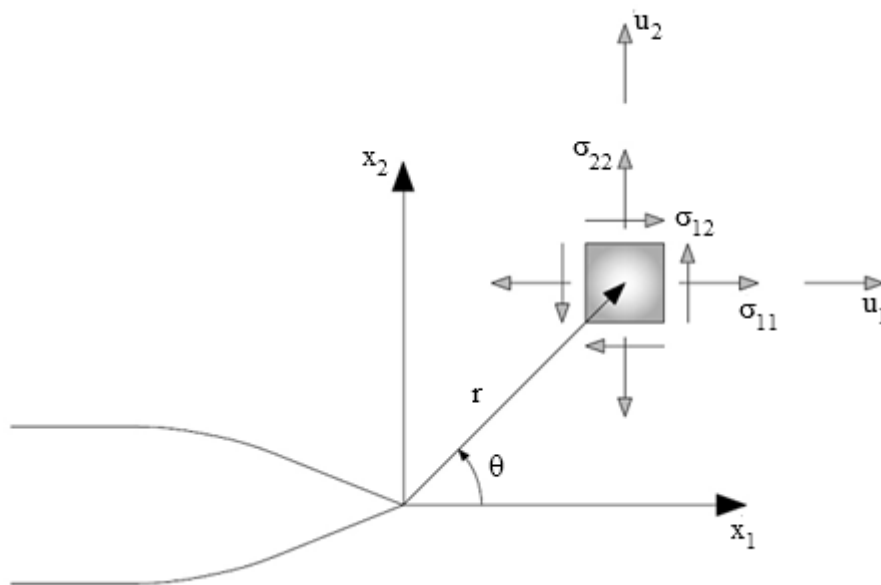


Figura 9. Sistemas de Coordenadas na Ponta da Trinca (Sato, 2009)

Foi baseado no trabalho de Westergaard que Irwin, em 1957, identificou um fator de proporcionalidade em associação a cada modo de fratura: os então chamados fatores de intensidade de tensão, K_I , K_{II} e K_{III} , em relação aos modos *I*, *II* e *III*, respectivamente. Assim, é possível reescrever a Eq. (19):

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta). \quad (20)$$

O fator de intensidade de tensão pode ser interpretado fisicamente como um parâmetro que define a intensidade do campo de tensões e deslocamentos nas proximidades da ponta da trinca, de forma a não depender das coordenadas polares definidas na Fig. 9. Desse modo, duas trincas completamente distintas, submetidas a tensões diferentes e com comprimentos diversos, apresentarão a mesma distribuição de tensões e deslocamentos uma vez que os respectivos fatores de intensidade de tensão forem idênticos (Sato, 2009).

Considerando o comprimento da trinca como sendo $2a$ (Figura 6) e a tensão σ , pode-se escrever a expressão para o fator de intensidade de tensão (Broek, 1982):

$$K_I = \beta \sigma \sqrt{a}. \quad (21)$$

Comparando as dimensões das Equações (20) e (21), é possível concluir que $\beta = \sqrt{\pi}$, assim, tem-se:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a}. \quad (22)$$

Admite-se agora uma largura à placa da Fig. 6 denotada por W . Quanto menor for W , maior será a tensão na ponta da trinca. Assim, sabemos que o fator de intensidade de tensão K_I é inversamente proporcional à largura da placa W . Define-se, portanto, o fator adimensional β como dependente de fatores geométricos do problema, ou seja:

$$\beta = \frac{a}{W} + \frac{a}{D} + \frac{a}{R}, \quad (23)$$

na qual D denota o comprimento e R a altura da placa. Substituindo a Eq. (23) em (21), após algumas manipulações algébricas, teremos:

$$K_I = \beta \left(\frac{a}{L} \right) \sigma \sqrt{\pi a}, \quad (24)$$

na qual L denota o parâmetro geométrico generalizado em que β é dependente. Conhecendo-se o fator geométrico β , bastará inquirir o parâmetro que define o comprimento da trinca a e a tensão aplicada à placa para que a Eq. (24) possa ser resolvida.

Para uma trinca de tamanho $2a$ disposta no centro de uma placa considerada infinita, a expressão para o fator de intensidade de tensão será idêntica à Eq. (22). No caso da mesma trinca habitar uma placa cuja largura W é conhecida, e finita, a solução analítica para K_I será da forma:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \sqrt{\sec \frac{\pi a}{W}}. \quad (25)$$

No caso dessa mesma trinca situar-se na borda da placa, conforme a Fig. 10 abaixo, o fator de intensidade de tensão assumirá a forma:

$$K_I = 1,12\sigma\sqrt{\pi a} \sqrt{\sec \frac{\pi a}{W}}. \quad (26)$$

Ou ainda para uma placa de dimensões infinitas:

$$K_I = 1,12\sigma\sqrt{\pi a}. \quad (27)$$

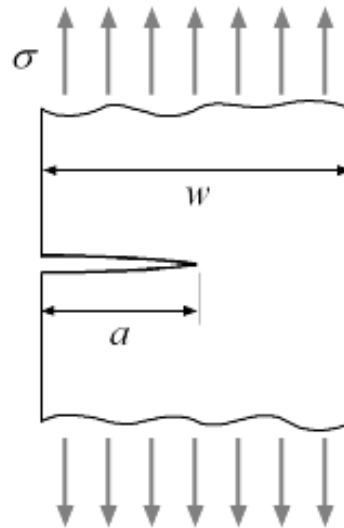


Figura 10. Trinca de borda em uma placa de largura W e comprimento infinito

As soluções analíticas acima dispostas servirão de guia para a validação do modelo numérico do MEC usado neste trabalho.

Irwin mostrou ainda em 1957 que os fatores de intensidade de tensão poderiam ser relacionados com a taxa de alívio de energia potencial, deduzida por ele um ano antes. Assim, usando a Eq. (18) e os conceitos dispostos acima, escreve-se, para um material sob regime linear elástico:

$$G_I = \frac{K_I^2}{E'}, \quad (28)$$

$$G_{II} = \frac{K_{II}^2}{E'}, \quad (29)$$

$$G_{III} = \frac{K_{III}^2}{2\mu}, \quad (30)$$

na qual $E' = E$ para tensão plana e $E' = E/(1 - \nu^2)$ para deformação plana.

Para o caso geral, temos (Sato, 2009):

$$G = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{E'} + \frac{K_{III}^2}{2\mu}. \quad (31)$$

3.2.6 Campos de Tensões e Deslocamentos

Após apresentar o conceito do fator de intensidade de tensão e reescrever a expressão da taxa de alívio de energia potencial, Irwin, em 1958, apresentou as equações para a distribuição de tensão próxima à ponta da trinca, juntamente associadas com cada um dos modos de fratura apresentados no tópico anterior. Assim, o campo de tensões para modo *I* considerando o sistema de coordenadas apresentado na Fig. 9 será:

$$\sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \right\}, \quad (32)$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \right\}, \quad (33)$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]. \quad (34)$$

Em que r e θ se referem ao sistema de coordenadas polares com origem na ponta da trinca conforme ilustrado na Fig. 9.

O respectivo campo de deslocamentos será:

$$u_1 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 + 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right], \quad (35)$$

$$u_2 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 - 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]. \quad (36)$$

De forma semelhante, para um corpo carregado em modo *II* (modo de cisalhamento), as equações para o campo de tensões serão:

$$\sigma_{11} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ -\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \right\}, \quad (37)$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right], \quad (38)$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \right\}. \quad (39)$$

Para o campo de deslocamentos, as expressões possuem a forma:

$$u_1 = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 + 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right], \quad (40)$$

$$u_2 = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \right\}. \quad (41)$$

Em modo *III* (modo de torção), as equações para o campo de tensões tomam a forma:

$$\sigma_{13} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (42)$$

$$\sigma_{23} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (43)$$

O deslocamento é dado pela expressão:

$$u_3 = \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (44)$$

Nas equações acima, κ representa a constante elástica do material, sendo $3 - 4\nu$ para deformação plana e $\frac{3-\nu}{1+\nu}$ para tensão plana, na qual ν é a razão de Poisson; μ denota o módulo de cisalhamento e K_I , K_{II} e K_{III} os fatores de intensidade de tensão para os modos *I*, *II* e *III*, respectivamente.

Diz-se que o corpo está carregado em modo misto quando há solicitação de forma a exibir mais de um modo de fratura; assim, as tensões e deslocamentos podem ser facilmente obtidos através do Princípio da Superposição, dado a característica linear de tais equações (Anderson, 1994). Assim, temos:

$$\sigma_{ij}^{total} = \sigma_{ij}^I + \sigma_{ij}^{II} + \sigma_{ij}^{III}. \quad (45)$$

Dependendo da necessidade, a Eq. (37) pode ser aplicada para qualquer situação que contemple o modo misto.

Faz-se necessário observar que as equações do campo de deslocamentos em todos os modos de fratura acima apresentados são proporcionais a \sqrt{r} , o que significa dizer que a tensão próxima à ponta da trinca varia com a raiz quadrada de r , independentemente da configuração do corpo trincado.

Tal fato motivou o desenvolvimento da estratégia denominada *Elemento de Ponto a um Quarto*, aplicada ao código do MEC utilizado neste trabalho, que utiliza justamente \sqrt{r} para realizar a interpolação, ao invés de um polinômio de segundo grau, obtendo, assim, resultados mais precisos. Tal formulação será apresentada no decorrer deste texto.

Caso queiramos fazer r tender a zero, as equações acima indicarão que o campo de tensões tenderá, por sua vez, a infinito. Em problemas práticos, entretanto, o que de fato ocorre é um escoamento na região próxima à ponta da trinca, de forma que a tensão, por conseguinte, não cresce indefinidamente. Todavia, se a região que sofreu o escoamento é suficientemente pequena, o campo de tensões próximo à extremidade da trinca é perfeitamente representado pelas equações anteriores; essas, é também pertinente observar, são válidas somente em regiões próximas à ponta da trinca. Longe da extremidade as equações indicarão que as tensões se anulam, o que não ocorre de fato; na verdade, as tensões tendem à tensão nominal aplicada à placa.

3.3 Mecânica da Fratura Elasto-Plástica

3.3.1 Plastificação da Ponta da Trinca

A formulação anteriormente apresentada destoa do que é observado na prática uma vez que os materiais utilizados para projetos de engenharia nem sempre têm comportamento perfeitamente elástico; dessa forma, é preciso considerar o comportamento plástico inerente a tais materiais. A grande maioria deles sofre deformação plástica em regiões próximas à ponta da trinca, contemplando, assim, uma equivalência entre a tensão atuante na peça e o limite de escoamento do material durante sua deformação.

A Mecânica da Fratura Linear Elástica, portanto, é válida apenas para materiais idealmente elásticos, sendo que no caso de deformação plástica far-se-á necessário aplicar outro tipo de formulação, a chamada Mecânica da Fratura Elasto-Plástica.

Considerando o caso de tensões muito próximas à ponta da trinca, ou seja, quando o raio tender a zero, as equações apresentadas anteriormente preveem que a tensão em tal região tenderá a infinito; entretanto, o que se forma é uma região elasto-plástica. Essa região pode ser determinada ao descrevermos a distância da ponta da trinca até um ponto cuja tensão atuante não exceda o limite de escoamento do material, denotado por σ_y , que representa o raio da região elasto-plástica. Para o caso em que o plano de trabalho define $\theta = 0$, podemos escrever, usando a formulação de Irwin:

$$r_y = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_{ys}^2} = \frac{\sigma^2 a}{2\sigma_{ys}^2}, \quad (46)$$

na qual, σ_{ys} denota o limite de escoamento do material. A Fig. 11 apresenta o gráfico do comportamento da tensão próxima à trinca, considerando a região elasto-plástica descrita anteriormente.

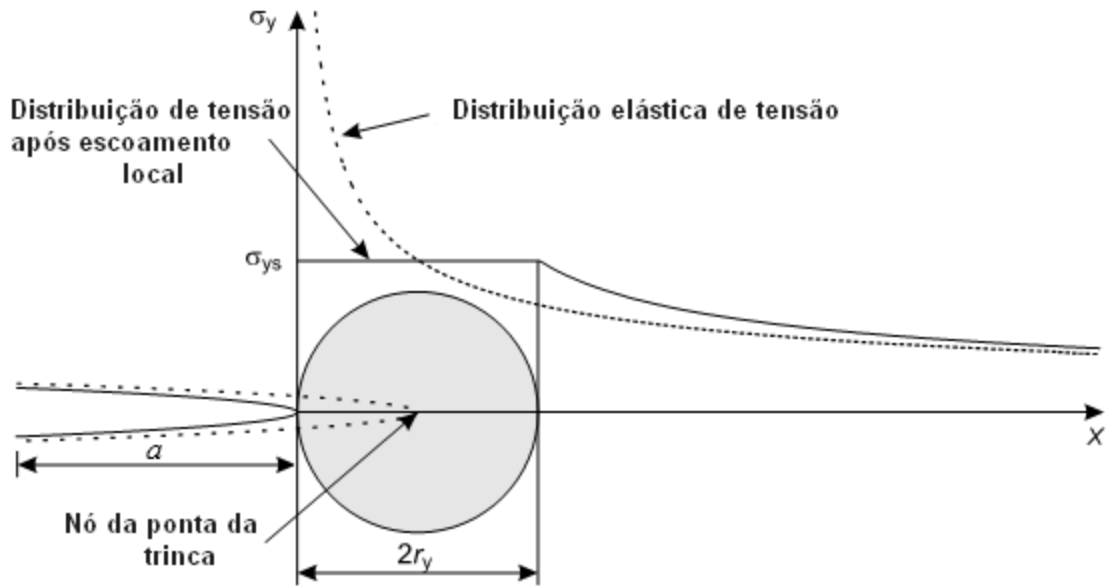


Figura 11. Região elasto-plástica próxima à ponta da trinca (Janssen et al, 2005)

3.3.2 A Integral J

Em 1961, Wells publicou um artigo² sobre a propagação instável de trincas em metais. Ao testar tipos diferentes de aços estruturais a fim de medir o fator de intensidade de tensão em modo I, o pesquisador descobriu que certos materiais se comportavam de forma a divergir da formulação original da Mecânica da Fratura Linear Elástica. A descoberta revelou que a elevada dureza do material, embora fosse extremamente desejável em termos de projeto mecânico, implicava em um desajuste junto à teoria vigente. Duas formulações foram propostas para contemplar não somente os materiais de comportamento linear elástico como também os elasto-plásticos, o *Deslocamento de Abertura da Ponta da Trinca* e a *Integral J* (Anderson, 1994).

Em 1968, Rice aplicou pela primeira vez uma integral independente do caminho - obtida através do teorema da conservação da energia - a um problema de Mecânica da Fratura. A formulação é conhecida como *Integral J*.

A Integral *J* é definida em relação a um sistema de coordenadas na ponta da trinca, como ilustrado na Fig. 12, sendo descrita pela equação (para o caso bidimensional):

$$J = \int_{\Gamma} \left(Wn - t_j \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) ds, \quad (47)$$

na qual W denota a densidade de energia de deformação, definida pela expressão $W = \int^{\varepsilon_{kl}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$, t_j representa as forças de superfície, n o vetor normal e Γ um caminho arbitrário circundando a ponta da trinca que deve ser percorrido no sentido anti-horário durante o processo de integração (Sato, 2009).

A relação entre J e o fator de intensidade de tensão K_I pode ser postulada uma vez que já foi anteriormente definido o parâmetro G (Equação 28), que representa a variação da energia liberada na ponta da trinca.

² Wells, A.A., "Unstable Crack Propagation in Metals: Cleavage and Fast Fracture." **Proceedings of the Crack Propagation Symposium**, Vol. 1, Paper 84. Cranfield. UK. 1961.

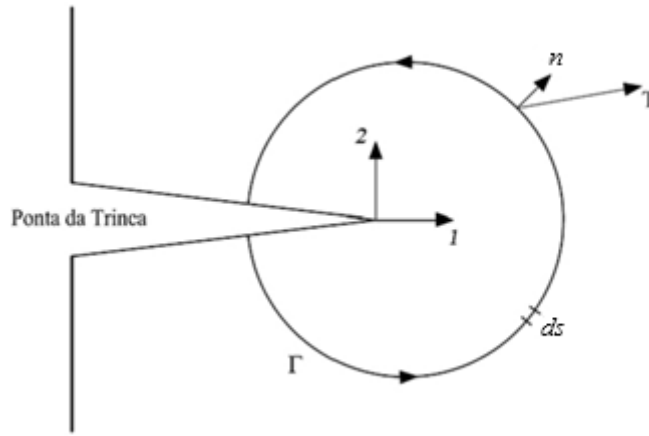


Figura 12. Representação da Integral J (Sato, 2009)

Considerando que a Integral J denota a taxa de liberação de energia do material, igualando ambos os parâmetros, é possível escrever (para o modo de abertura):

$$J = \frac{K_I^2}{E'}. \quad (48)$$

3.4 Métodos Numéricos para o Cálculo do K_I

Neste trabalho, obteremos o valor do fator de intensidade de tensão em modo I fazendo uso de três métodos distintos. O primeiro deles, cuja metodologia será explicitada no tópico a seguir, utilizará o programa *ElastQuadratico.m* na sua forma original, com uma entrada de dados que deverá contemplar o problema de uma trinca central em uma placa plana de comprimento tendendo a infinito. O programa utilizado, como o próprio nome permite inferir, não foi implementado para resolver problemas de Mecânica da Fratura, entretanto, podemos utilizar algumas variáveis de saída - como os deslocamentos dos nós - para estimar o fator de intensidade de tensão correspondente.

Em seguida, utilizando o mesmo programa, será inserido ao código um comando que mudará a posição do nó central do elemento quadrático imediatamente após a ponta da trinca para um quarto do comprimento original do elemento, na direção da ponta da trinca - o chamado *Elemento de Ponto a um Quarto* (Albuquerque, 1997); tal modificação leva em consideração o comportamento proporcional à \sqrt{r} do campo de deslocamento, incluindo novas funções de forma que assistem tal característica.

Embora a formulação de *Elemento de Ponto a um Quarto* melhore consideravelmente o resultado obtido por funções de forma quadrática, a estratégia não aproxima muito bem o campo de tensões, uma vez que as equações que o descrevem são proporcionais ao inverso da \sqrt{r} . Assim, será

utilizado o chamado *Elemento de Ponto a um Quarto com Singularidade de Tração* junto ao programa *Elast_Qua.m*, cujo código já contém as respectivas funções de forma, contemplando não só o campo de deslocamentos como o campo de tensões, aproximando a solução de forma completa.

Finalmente, será utilizado outro programa nomeado de *dual.m* - contemplando a formulação do Método dos Elementos de Contorno Dual, que utilizará a Integral J para calcular o fator de intensidade de tensões.

3.4.1 Elementos Quadráticos Padrão

O programa *ElastQuadratico.m* utiliza a formulação do Método dos Elementos de Contorno aplicado à problemas Elástico Lineares. O método, implementado em linguagem MatLab®, utiliza *functions* (programas que trabalham paralelamente ao programa mestre) distintas que deverão operar em sequência, realizando cálculos definidos a fim de que o problema seja resolvido. O código principal compila as seguintes *functions*, respectivamente:

- 1) *format_dad*: *function* usada para formatar os dados iniciais do problema, devolvendo as matrizes dos nós e elementos da geometria previamente definida, bem como a matriz com as condições de contorno;
- 2) *mostra_geo* e *mostra_cdc*: *functions* responsáveis pela plotagem da geometria do problema, bem como das condições de contorno, respectivamente;
- 3) *gera_pontos_internos*: *function* responsável pela criação dos pontos internos da geometria. Retorna um vetor com a informação dos números de pontos nas coordenadas cartesianas x e y ;
- 4) *monta_GeH*: programa para as matrizes de influência $[G]$ e $[H]$;
- 5) *aplica_CDC*: *function* que aplica as condições de contorno do problema, gerando a matriz *matA* e o vetor *b*;
- 6) $x = \text{matA}/b$: linha de comando responsável por calcular as variáveis desconhecidas do problema;
- 7) *reordena*: *function* para separar os deslocamentos de forças de superfície, segundo as condições de contorno;
- 8) *calc_desl_int*: calcula os deslocamentos dos pontos internos;
- 9) *calc_tens_cont*: calcula as tensões nos nós;
- 10) *calcula_MatD_MatS*: *function* responsável por montar as matrizes necessárias ao cálculo das tensões nos pontos internos. O programa calcula, dentre outras coisas, as derivadas da solução fundamental, montando as matrizes com tais informações na sequência;
- 11) *calcula_tens_pint*: calcula as tensões nos pontos internos;

12) *map_cor*: gera um mapa de cor que mostra uma das seguintes variáveis: deslocamento total, tensão σ_x , tensão σ_y , tensão τ_{xy} ou a tensão equivalente de von Mises; para problemas de Estado Plano de Tensão ou Deformação.

O programa começa com a leitura do arquivo de dados, que dependerá da natureza do problema. Uma vez lidos, os dados são formatados pela primeira *function* da lista acima.

A estratégia que será utilizada para a obtenção do K_I utilizará a Eq. (36), que descreve o deslocamento vertical para abertura em modo I. O programa utilizado retornará uma matriz com todas as informações sobre o deslocamento dos nós, assim, basta localizarmos o primeiro nó imediatamente depois da ponta da trinca, informarmos o respectivo valor do deslocamento vertical, e calcularmos K_I através da Eq. (36), repetida propositalmente abaixo:

$$u_2 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 - 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]. \quad (49)$$

A Eq. (49) possui três variáveis que deverão ser determinadas para o cálculo do fator de intensidade de tensões, bem como duas constantes que dependem das propriedades do material. A maioria desses parâmetros será determinada automaticamente através da entrada de dados do problema a ser simulado, entretanto, faz-se necessário explicitarmos como determinados o deslocamento vertical u_2 e os parâmetros do sistema coordenado: a distância r e o ângulo θ .

3.4.2 Elementos de Ponto a um Quarto

As equações que descrevem o campo de deslocamentos perto da trinca demonstram possuir um comportamento proporcional à \sqrt{r} , o que nos faz concluir que caso as funções de forma considerem tal característica, o resultado terá uma melhor aproximação que se usado elementos de contorno quadráticos, o que dispensará, ainda, maiores refinamentos na malha.

As funções de forma para interpolação quadrática estão dispostas a seguir:

$$\phi_1 = \frac{1}{2} \xi (\xi - 1), \quad (50)$$

$$\phi_2 = 1 - \xi^2, \quad (51)$$

$$\phi_3 = \frac{1}{2} \xi (\xi + 1). \quad (52)$$

Considerando que a integração de Gauss é realizada no intervalo $[-1, 1]$, faz-se necessário criar funções que deverão relacionar os pontos de integração inicial e final dos elementos de contorno com o respectivo intervalo de integração supracitado. Tais funções são denominadas funções de forma, e, nas equações acima, ξ representa uma coordenada adimensional ao longo do elemento de contorno.

Conhecendo a natureza das equações do campo de deslocamento, utilizar funções de forma que possuem o comportamento \sqrt{r} traz mais eficiência à análise numérica em questão. Para tal, será provado que bastará mudar a posição do nó central do elemento imediatamente após a ponta da trinca para um quarto do comprimento do elemento na direção dessa mesma extremidade.

O deslocamento é dado pela seguinte equação, em que n representa o número do nó e y o deslocamento:

$$y = \phi_n y_n. \quad (53)$$

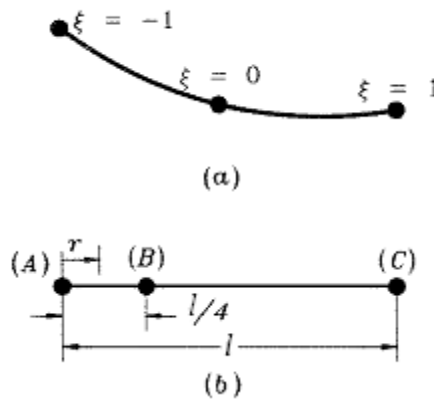


Figura 13. (a) elemento quadrático padrão e (b) elemento de ponto a um quarto (Albuquerque, 1997)

Considerando a Fig. 13 acima e a Eq. (53), é possível descrever a posição r em relação à variável ξ das Figuras 13b e 13a, respectivamente:

$$r = \phi_1 r_1 + \phi_2 r_2 + \phi_3 r_3. \quad (54)$$

Em que:

$$r_1 = 0, \quad (55)$$

$$r_2 = l/4, \quad (56)$$

$$r_3 = l. \quad (57)$$

Substituindo as equações (55), (56) e (57) junto às funções de forma definidas anteriormente à Eq. (54), encontraremos uma relação entre ξ e r na medida em que o primeiro faz-se diretamente proporcional à raiz quadrada do segundo, conforme era pretendido. Assim, as novas funções de forma podem ser escritas.

$$\phi_1 = 2\frac{r}{l} - 3\sqrt{\frac{r}{l}} + 1, \quad (58)$$

$$\phi_2 = -4\frac{r}{l} + 4\sqrt{\frac{r}{l}}, \quad (59)$$

$$\phi_3 = -\sqrt{\frac{r}{l}} + 2\frac{r}{l}. \quad (60)$$

Podemos substituir ainda as equações (58), (59) e (60) em (54) e acharmos uma nova expressão para o deslocamento.

Foi demonstrado, portanto, que uma simples mudança de posição do nó para um quarto do comprimento do elemento implica numa interpolação mais exata para as equações dos deslocamentos.

3.4.3 Elementos de Ponto a um Quarto com Singularidade de Tração

Muito embora o resultado para o fator de intensidade de tensões anteriormente calculado tenha se aproximado consideravelmente de seu valor analítico com a utilização de *Elementos de Ponto a um Quarto*, é interessante atentar que tal resultado ainda pode ser melhorado ao aproximarmos não só o campo de deslocamentos, como o campo de tensões (forças de superfície), incluindo a singularidade do tipo $\sqrt{1/r}$ às funções de forma. Para tal, devemos fazer algo semelhante à estratégia usada no tópico anterior. As novas funções de forma serão (Albuquerque, 1997):

$$p_i = \bar{\phi}_1 \bar{p}_i^{(A)} \sqrt{\frac{l}{r}} + \bar{\phi}_2 \bar{p}_i^{(B)} \sqrt{\frac{l}{r}} + \bar{\phi}_3 \bar{p}_i^{(C)} \sqrt{\frac{l}{r}}, \quad (61)$$

ou,

$$p_i = \bar{\phi}_1 \bar{p}_i^{(A)} + \bar{\phi}_2 \bar{p}_i^{(B)} + \bar{\phi}_3 \bar{p}_i^{(C)}, \quad (62)$$

onde, $\bar{\phi}_1$, $\bar{\phi}_2$ e $\bar{\phi}_3$ denotam as funções de forma modificadas a incluir a singularidade do tipo $\sqrt{1/r}$; \bar{p}_i representa a própria tração dividida pelo seu valor nodal de ϕ_i no nó, ou seja:

$$\bar{p}_i^{(A)} = \lim_{r \rightarrow 0} \bar{p}_i^{(A)} \sqrt{\frac{l}{r}}, \quad (63)$$

$$\bar{p}_i^{(B)} = \frac{\bar{p}_i^{(B)}}{2}, \quad (64)$$

$$\bar{p}_i^{(C)} = \bar{p}_i^{(C)}. \quad (65)$$

A Eq. (64) pode ser escrita na forma:

$$p_i = \bar{a}_i^{(1)} \sqrt{\frac{l}{r}} + \bar{a}_i^{(2)} \sqrt{\frac{l}{r}} + \bar{a}_i^{(3)} \sqrt{\frac{r}{l}}, \quad (66)$$

onde,

$$\bar{a}_i^{(1)} = \bar{p}_i^{(A)}, \quad (67)$$

$$\bar{a}_i^{(2)} = -\bar{p}_i^{(C)} + 4\bar{p}_i^{(B)} - 3\bar{p}_i^{(A)}, \quad (68)$$

$$\bar{a}_i^{(3)} = 2\bar{p}_i^{(C)} - 4\bar{p}_i^{(B)} + 2\bar{p}_i^{(A)}. \quad (69)$$

As funções de forma modificadas apresentadas acima foram implementadas ao código *Elast_Qua.m*. Com a formulação de *Elementos de Ponto a um Quarto com Singularidade de Tração*, conseguimos aproximar não só o campo de deslocamentos como o campo de tensões, o que nos levará a um resultado mais preciso.

A desvantagem de se usar elementos de ponto a um quarto é que o elemento tem de ser quadrático contínuo e a malha deve ser modificada. Para evitar estes impasses, o cálculo do fator de intensidade de tensão pode ser realizado utilizando a integral J . Conforme será mostrado, neste caso, bastará calcularmos as tensões e deslocamentos no interior do domínio, o que acaba sendo muito adequado para o MEC.

3.4.4 Metodologia para a Determinação do K_I

Com o intuito de simplificarmos o cálculo do fator de intensidade de tensões podemos reescrever a Eq. (49) de modo a isolar o termo cujo valor deseja-se obter. Faz-se interessante observar que essa equação trabalha apenas com o deslocamento vertical. Para trabalharmos com a abertura da trinca, tomaremos a variação do deslocamento vertical u_2 , ou seja: $u_2(\theta = \pi) - u_2(\theta = -\pi)$.

(a) Determinação do deslocamento vertical u_2

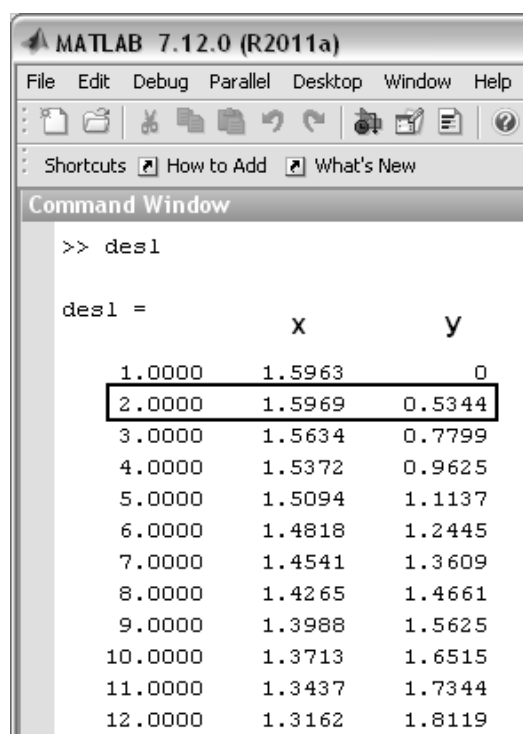
Após rodar o programa *ElastQuadratico.m* com a entrada de dados correspondente ao problema em questão, que será detalhada à frente, é possível obter o vetor deslocamento de todos os nós da placa ao escrevermos o comando *desl* no *Command Window* do Matlab. O *software* retornará uma matriz como a ilustrada na Fig. 14.

Na Fig. 14, a primeira coluna corresponde ao número do nó, a segunda coluna indica o deslocamento horizontal e a terceira o deslocamento vertical. Tomemos o valor de u_2 na Eq. (49) igual

ao deslocamento no eixo y da segunda linha da matriz da Fig. 14, que corresponde ao segundo nó depois da ponta da trinca. O modelo da placa é dado pela Fig. 6.

Como a placa é retangular e a trinca é disposta no centro do corpo, podemos nos valer dos benefícios da simetria e modelar apenas um quarto da placa de altura infinita com trinca central, conforme mostrado na Fig. 20.

Para o caso em questão, $u_2 = 0,5344$.



```

>> desl

desl =

      x      y
1.0000  1.5963      0
2.0000  1.5969  0.5344
3.0000  1.5634  0.7799
4.0000  1.5372  0.9625
5.0000  1.5094  1.1137
6.0000  1.4818  1.2445
7.0000  1.4541  1.3609
8.0000  1.4265  1.4661
9.0000  1.3988  1.5625
10.0000  1.3713  1.6515
11.0000  1.3437  1.7344
12.0000  1.3162  1.8119

```

Figura 14. Vetor deslocamento fornecido pelo programa *ElastQuadratico.m*

Tal estratégia será repetida para o cálculo do fator de intensidade de tensões usando Elementos de Ponto a um Quarto.

(b) Definição do comprimento r

O comprimento r é definido como a distância da ponta da trinca até o nó em que se deseja calcular o fator de intensidade de tensões.

Para o nó analisado (segundo nó imediatamente após a ponta da trinca), o valor de r é expresso em função do comprimento do elemento l (Sato, 2009):

$$r = \frac{l}{2}. \quad (70)$$

Ao utilizarmos elementos de ponto a um quarto, a Eq. (56) especifica $r = \frac{l}{4}$ para o segundo nó do primeiro elemento, anteriormente o nó do centro, conforme ilustra a Fig. 15.

Dessa forma, podemos escrever a Eq. (49) de forma a depender apenas do comprimento do elemento, que por sua vez terá seu valor relacionado à discretização do problema.

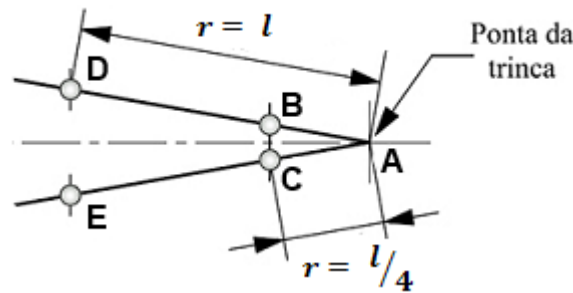


Figura 15. Nós na vizinhança da ponta da trinca usando elementos de ponto a um quarto

O comprimento l do elemento pode ser obtido através da diferença da coordenada x do primeiro e do terceiro nó, uma vez que a trinca é horizontal. Inserindo a linha de código correspondente, teremos:

```
comp= (NOS (3,2) -NOS (1,2) ) ;
```

Executando o comando acima, obteremos $l = 0,06$. Outra forma de calcular o comprimento do elemento seria simplesmente dividindo o comprimento da trinca, de 1,8, por 30 - que é a quantidade de elementos de iguais comprimentos dispostos no primeiro segmento da placa, local que contém a trinca. O resultado seria o mesmo, 0,06.

Para o caso de se querer trabalhar com o próprio valor de r a despeito do comprimento do elemento, basta verificarmos a matriz [NOS] – que mostra a posição de todos os nós da placa, atribuindo o comando, para os nós 2, 3 e 4 respectivamente:

```
r2=NOS (2,2) -NOS (1,2) ;
r3=NOS (3,2) -NOS (1,2) ;
r4=NOS (4,2) -NOS (1,2) ;
```

(c) Determinação do ângulo θ

Considerando o sistema de coordenadas polares no qual o elemento de tensão localizado nas proximidades da ponta da trinca é descrito, repetido na Fig. 16 por conveniência, observa-se que, para o problema simulado no programa supracitado, a direção x_1 é contrária à direção do modelo que exhibe o sistema coordenado abaixo.

A variação do deslocamento vertical que representa a abertura da trinca poderá ser calculada variando o ângulo θ de π a $-\pi$.

Finalmente, podemos escrever:

$$u_2(\theta = \pi) - u_2(\theta = -\pi) = \frac{\kappa + 1}{\mu} K_I \sqrt{\frac{r}{2\pi}}. \quad (71)$$

Isolando K_I , teremos:

$$K_I = \frac{\mu}{\kappa + 1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [u_2(\theta = \pi) - u_2(\theta = -\pi)]. \quad (72)$$

Uma vez que apenas 1/4 da placa foi modelada, e apenas uma das arestas da trinca foi discretizada, a abertura da trinca será igual a soma dos deslocamentos verticais dos nós da face superior e inferior. Como o problema é simétrico, temos que: $u_2^{(B)} = -u_2^{(C)}$ e $u_2^{(D)} = -u_2^{(E)}$, de acordo com a Fig. 15, onde $u_2^{(B)}$, $u_2^{(C)}$, $u_2^{(D)}$ e $u_2^{(E)}$ denotam o deslocamento vertical do nó B, C, D e E, respectivamente.

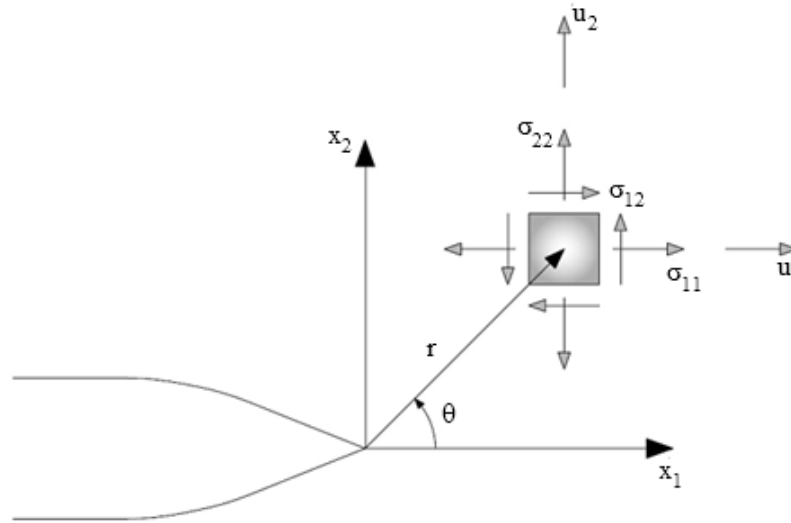


Figura 16. Sistemas de Coordenadas na Ponta da Trinca (Sato, 2009)

(d) Método da Correlação de Deslocamentos

A metodologia da correlação (ou extrapolação) de deslocamentos recorre a expressões que empregam valores de deslocamento em pontos localizados na face da trinca. As expressões usando elementos quadráticos padrão e elementos de ponto a um quarto serão deduzidos a seguir, com os quais poderemos calcular o fator de intensidade de tensão em modo de abertura com relativa facilidade. As expressões para K_I apresentadas na sequência foram implementadas ao código principal da análise elastostática feita com a formulação do MEC.

A Eq. (72) apresentada anteriormente será a base para a dedução das expressões finais seguindo o método supracitado. Primeiramente utilizamos elementos quadráticos padrão. Os nós na vizinhança da ponta da trinca serão distribuídos como na Fig. 17.

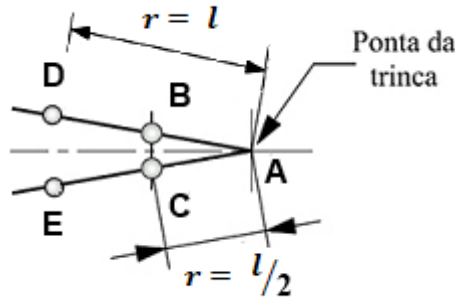


Figura 17. Nós na vizinhança da ponta da trinca usando elementos quadráticos padrão

Para o nó imediatamente após a ponta da trinca, ou seja, o segundo nó, temos que $r = l/2$ e, para o terceiro nó, $r = l$, como já definido na Eq. (70). Assim, podemos escrever:

$$K_I^{(BC)} = \frac{\mu}{\kappa + 1} \sqrt{\frac{2\pi}{l}} (u_2^{(B)} - u_2^{(C)}), \quad (73)$$

$$K_I^{(DE)} = \frac{\mu}{\kappa + 1} \sqrt{\frac{\pi}{l}} (u_2^{(D)} - u_2^{(E)}), \quad (74)$$

onde $K_I^{(BC)}$ e $K_I^{(DE)}$ denotam os fatores de intensidade de tensão para os nós BC e DE , respectivamente, de acordo com a Fig. 17. Por meio de uma extrapolação linear dos nós B , C e D , E para a ponta da trinca, teremos:

$$K_I = \frac{2\mu}{\kappa + 1} \sqrt{\frac{\pi}{l}} (\sqrt{2}u_2^{(B)} - u_2^{(D)}). \quad (75)$$

Analogamente, podemos deduzir a expressão para K_I usando elementos de ponto a um quarto, cuja relação entre r e l foi estabelecida na Fig. 15. Substituindo as funções de forma (58), (59) e (60), na Equação (76) apresentada a seguir, onde $y^{(i)}$ denota o deslocamento, tração ou posição ao longo do elemento, i é a direção, n é o número do nó do elemento e ϕ_n são as funções de forma (Albuquerque, 1997),

$$y^{(i)} = \phi_n(\xi)y_n^{(i)}, \quad (76)$$

teremos,

$$u_i = u_i^{(A)} + (-u_i^{(C)} + 4u_i^{(B)} - 3u_i^{(A)})\sqrt{\frac{r}{l}} + (2u_i^{(C)} - 4u_i^{(B)} + 2u_i^{(A)})\frac{r}{l}, \quad (77)$$

onde A , B e C são pontos definidos na Fig. 13.

Fazendo $u_i^{(A)} = 0$ e igualando os coeficientes que multiplicam \sqrt{r} das Equações (77) e (72), teremos, de forma análoga a obtida na Eq. (75) (Albuquerque, 1997):

$$K_I = \frac{2\mu}{\kappa + 1} \sqrt{\frac{2\pi}{l}} (4u_2^{(B)} - u_2^{(D)}), \quad (78)$$

onde B e D são pontos definidos na Fig. 17.

As Equações (75) e (78) foram usadas para calcular os fatores de intensidade de tensão, cujos resultados serão apresentados a frente.

É possível calcular K_I analiticamente através da Eq. (25) e comparar com o fator calculado numericamente, a fim de validarmos o modelo. O erro relativo correspondente é dado pela equação abaixo:

$$\delta = \frac{|K_I - 2,3780|}{2,3780}, \quad (79)$$

onde 2,3780 é o valor para o K_I calculado analiticamente no caso de uma trinca central em uma placa infinita com os parâmetros definidos segundo os problemas simulados ao utilizarmos elementos quadráticos padrão e elementos de ponto a um quarto.

3.4.5 Cálculo da Integral J

O programa usado para calcular a Integral J é baseado na Eq. (80):

$$J = r \int_{-\pi}^{\pi} \left[W(r, \theta) \cos(\theta) - T_K(r, \theta) \frac{\partial u_k(r, \theta)}{\partial x} \right]. \quad (80)$$

Inicialmente devemos definir a trajetória de integração para a Eq. (80). Como a Integral J independe do caminho, a implementação do cálculo da integral no programa *dual.m* contemplou uma circunferência centrada no nó mais próximo da ponta da trinca, e raio r conforme ilustrado na Fig. 18. A escolha da magnitude do raio possui a única restrição de não exceder os limites da placa. Desta forma, definiu-se arbitrariamente seu valor como a distância do primeiro ao quinto nó.

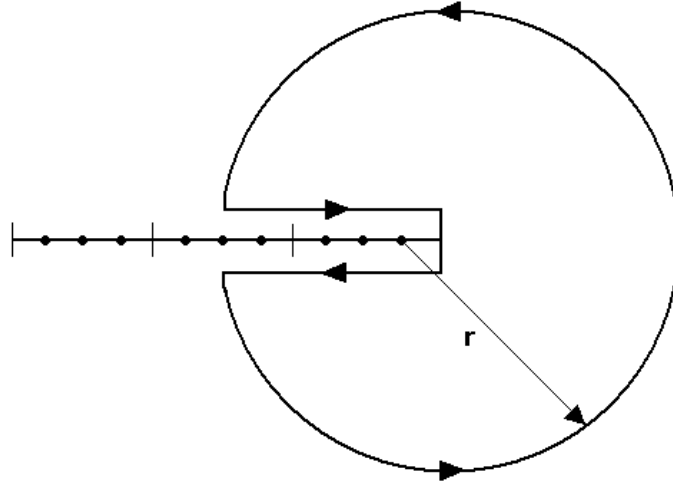


Figura 18. Distância do raio adotado para o cálculo da Integral J

A Integral J é resolvida numericamente através das Fórmulas de Newton-Cotes, cuja ideia expressa um polinômio que aproxime a função desejada ao interpolar essa função em pontos igualmente espaçados. No programa *dual.m* foi escolhido utilizar a Regra 1/3 de Simpson Repetida, que faz uso da fórmula de Lagrange para interpolar a função com um polinômio quadrático (Ruggieiro & Lopez, 1996).

Inicialmente foi definido arbitrariamente o número de pontos para a interpolação igual a 31. Assim, a distância angular entre eles pode ser calculada através da expressão a seguir:

$$d_{\text{pontos}} = \frac{2\pi}{\text{número de pontos}}, \quad (81)$$

onde o numerador na Eq. (81) representa o comprimento angular no intervalo de integração $[-\pi, \pi]$.

Em seguida converteu-se o sistema de coordenadas cilíndricas dos pontos no espaço para o sistema cartesiano através das expressões:

$$X_{\text{ponto}} = X_1 + r \cos(D), \quad (82)$$

$$Y_{\text{ponto}} = Y_1 + r \sin(D). \quad (83)$$

Nas Equações (82) e (83), X_1 e Y_1 denotam as coordenadas do nó correspondente à ponta da trinca e D é a distância entre os pontos.

A densidade da energia de deformação W , que aparece nas Equações (47) e (80), é calculada segundo a seguinte equação:

$$W_i = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) = \sigma_{11} \frac{du_1}{dx} - \sigma_{12} \frac{du_1}{dy} + \sigma_{12} \frac{du_2}{dx} + \sigma_{22} \frac{du_2}{dy}. \quad (84)$$

O produto das forças de superfície pelo diferencial do deslocamento é calculado pela expressão:

$$T_k \frac{du_k}{dx} = \left(\sigma_{11} \frac{du_1}{dx} + \sigma_{12} \frac{du_2}{dx} \right) \cos \theta + \left(\sigma_{11} \frac{du_1}{dx} + \sigma_{12} \frac{du_2}{dx} \right) \sin \theta. \quad (85)$$

Finalmente, substituindo as Equações (84) e (85) em (80) e discretizando essa última para ser integrada numericamente – onde os pontos de integração são dados pelas Equações (82) e (83) – temos:

$$J(i) = -\frac{1}{2}r \left[\left(\sigma_{11} \frac{du_1}{dx} - \sigma_{12} \frac{du_1}{dy} + \sigma_{12} \frac{du_2}{dx} + \sigma_{22} \frac{du_2}{dy} \right) \cos \theta + 2 \left(\sigma_{11} \frac{du_1}{dx} + \sigma_{12} \frac{du_2}{dx} \right) \sin \theta \right] \quad (86)$$

O valor numérico da Integral J segundo a Regra 1/3 de Simpson Repetida é dada pela expressão:

$$J = \frac{h}{3} [J_1 + J_n) + 4(J_1 + J_2 + \dots + J_{n-1}) + 2(J_2 + J_4 + \dots + J_{n-2})], \quad (87)$$

onde n denota o número de pontos da integral e h é a distância entre esses pontos. O algoritmo com a formulação anteriormente apresentada encontra-se em anexo. A Fig. 19 abaixo apresenta os pontos internos para calcular a Integral J em uma circunferência ao redor da ponta da trinca.

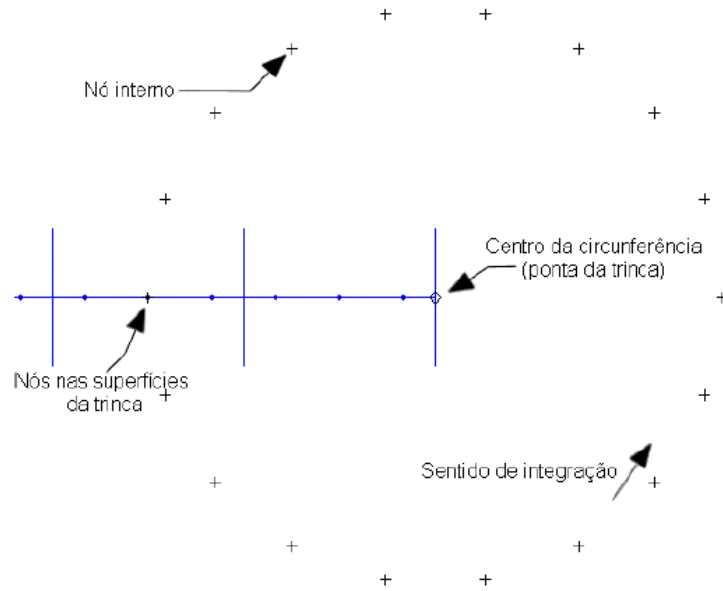


Figura 19. Pontos internos para calcular a Integral J em uma circunferência ao redor da ponta da trinca (Sato, 2009)

3.5 Resultados Numéricos para o Cálculo do K_I

3.5.1 Cálculo do K_I Usando Elementos Quadráticos Padrão

Como já comentado no tópico 3.4.1 deste texto, para calcularmos o fator de intensidade de tensões usando elementos quadráticos padrão através do programa *ElastQuadratico.m* basta investigarmos o vetor que informa os deslocamentos da placa que contém a trinca. Primeiramente, tratemos da formulação inicial do problema.

O modelo contempla uma placa com 7,2 unidades de comprimento de largura e 21,6 de altura, embora a entrada de dados expresse apenas metade da largura e comprimento da placa, uma vez que discretizamos apenas um quarto da placa ao aproveitarmos sua simetria. A Fig. 20 ilustra o problema tratado. A entrada de dados está disposta em anexo.

Faz-se interessante observar que a malha possui 15 elementos na maioria dos segmentos, entretantes, no primeiro e no último – os segmentos da base da placa – há 30 elementos, ou seja, optou-se por um maior refinamento neste local uma vez que a trinca se abre exatamente na base do corpo.

Outro ponto importante a ser observado no arquivo de entrada de dados e na Fig. 18 são as condições de contorno. Para simularmos uma trinca fazendo uso de uma análise elastostática, modelamos inicialmente a placa com um comprimento muito maior que sua largura, fazendo com que tal grandeza seja tratada como praticamente infinita. Em seguida, atribuímos uma condição de contorno de tração nos segmentos superiores e condições de contorno de deslocamento normal ao contorno conhecidos, e iguais a zero, sendo que a lateral direita e a extremidade esquerda da placa possuem restrição de movimento, conforme mostrado na Fig. 21.

Após rodar o programa, o vetor *desl* conterá as informações acerca do deslocamento dos nós no sentido de x e y . Com o comando *mostra_nos* podemos descobrir qual é o nó imediatamente após a ponta da trinca, assim, sabemos que o deslocamento vertical que devemos procurar em tal vetor é o do segundo e terceiro nós, como explicitado em 3.4.4 alínea (d). Os deslocamentos dos cinco primeiros nós da placa encontram-se na Tab. 1.

Tabela 1. Deslocamentos dos seis primeiros nós da placa

Número do nó	Deslocamento em x	Deslocamento em y
1	1,5963	0
2	1,5969	0,5344
3	1,5634	0,7799
4	1,5372	0,9625
5	1,5094	1,1137

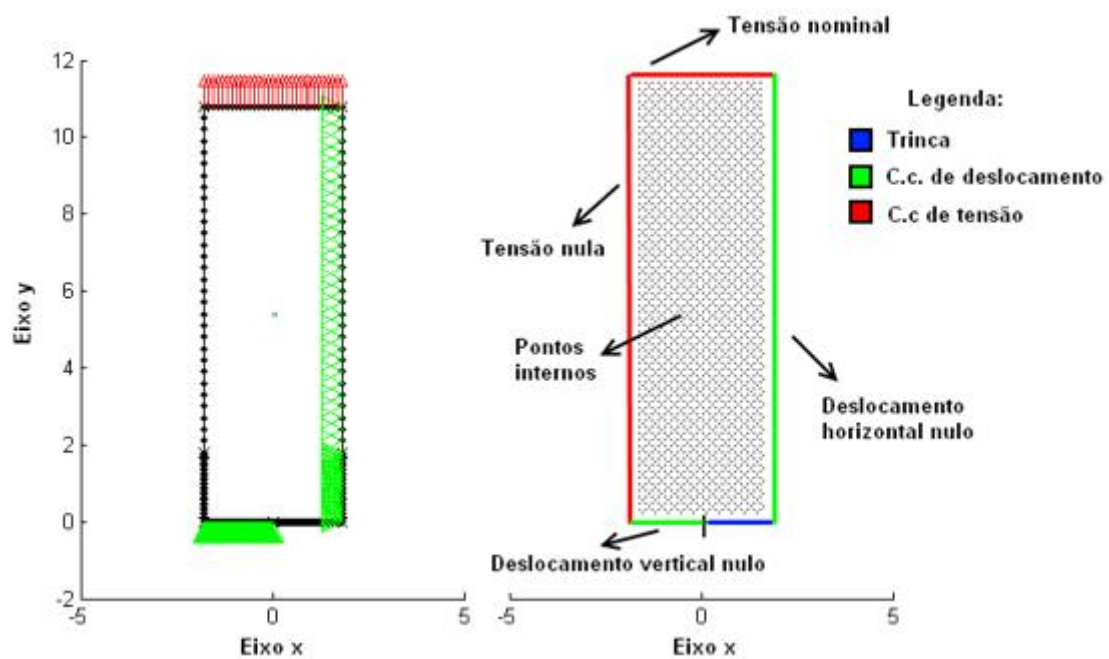


Figura 20. Modelagem de um quarto na placa com carregamento no infinito

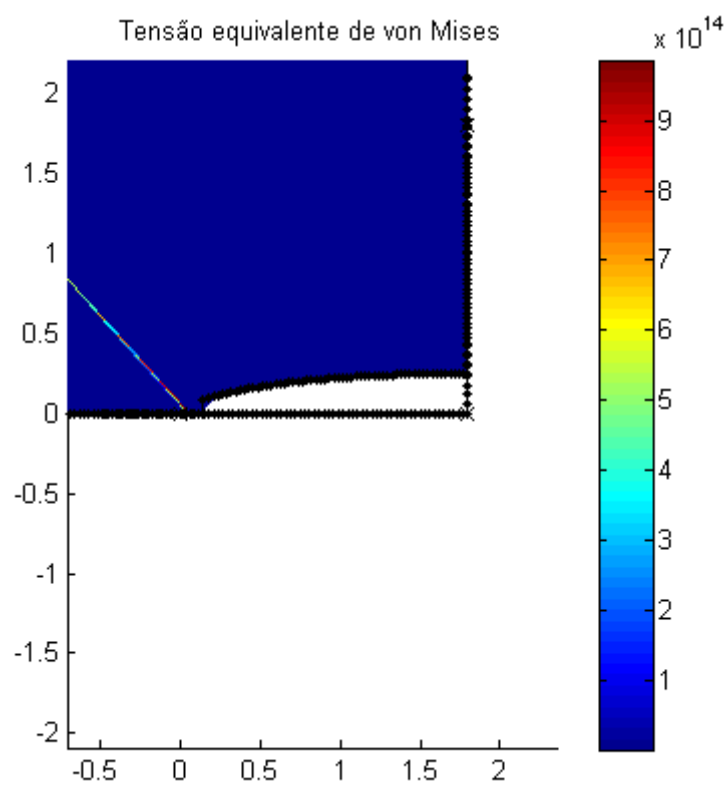


Figura 21. Abertura da trinca em detalhe

Podemos substituir as aberturas dos nós 2 e 3 em destaque na Tab. 1 na Eq. (75). Assim, temos:

$$K_I = 1,5386$$

Com erro relativo de:

$$\delta = 35,3 \%$$

Usando ainda elementos quadráticos, podemos diminuir o erro refinando a malha cada vez mais, entretanto, a convergência do modelo para a solução analítica ainda será lenta. Para melhorarmos o resultado, devemos seguir com a formulação de *Elemento de Ponto a um Quarto*.

3.5.2 Cálculo do K_I Usando Elementos de Ponto a um Quarto

Como demonstrado anteriormente, mudar de posição o nó central do primeiro elemento imediatamente após a ponta da trinca para a posição de um quarto de seu comprimento faz com que as funções de forma considerem o comportamento \sqrt{r} das equações do campo de deslocamento. Para implementarmos tal formulação, será inserida a seguinte linha de código ao programa principal:

```
NOS (2, 2) = (NOS (1, 2) + NOS (2, 2)) / 2;  
NOS (end, 2) = (NOS (end-1, 2) + NOS (end, 2)) / 2;
```

Assim, conseguimos mudar manualmente a posição do nó central. Rodando o programa com tal modificação, eis os valores dos deslocamentos dos seis primeiros nós:

Tabela 2. Deslocamento dos seis primeiros nós da placa (ponto a um quarto)

Número do nó	Deslocamento em x	Deslocamento em y
1	1,8240	0
2	1,7321	1,2095
3	1,6094	1,3380
4	1,5815	1,4436
5	1,5506	1,5463
6	1,5204	1,6430

Substituindo os valores em destaque na Tab. 2 na Eq. (78), teremos um novo valor para o fator de intensidade de tensões.

$$K_I = 2,1490$$

Com erro relativo de:

$$\delta = 9,6 \%$$

A modificação das funções de forma, conforme previsto, reduziu o erro consideravelmente.

3.5.3 Cálculo do K_I Usando Elementos de Ponto a um Quarto com Singularidade de Tração

Utilizando a mesma entrada de dados dos itens anteriores, simulamos a abertura de uma trinca central em uma placa com as funções de forma modificadas para conter as singularidades das equações dos campos de deslocamentos e tensões. Tomando o segundo nó do segmento que contém a trinca, calculamos o fator de intensidade de tensões:

$$K_I = 2,8193$$

Aqui, o erro relativo correspondente pode ser calculado através da equação abaixo (Martinez & Dominguez, 1984):

$$\delta = \frac{|K_I - 2,8298|}{2,8298}, \quad (88)$$

Assim, temos:

$$\delta = 0,37 \%$$

Em análise ao resultado anterior, fica claro que o código utilizado aproxima de forma muito satisfatória o comportamento físico de uma trinca central disposta em uma placa infinita com abertura em modo I. A inclusão da singularidade do tipo $\sqrt{1/r}$ reduz o erro consideravelmente, já que o resultado obtido faz uso de uma discretização grosseira de apenas dois elementos por segmento, ao contrário dos trinta elementos usados nas simulações anteriores.

3.5.4 Cálculo do K_I Usando a Integral J

Diferentemente do programa usado nos tópicos anteriores, o código *dual.m* nos permite não somente simular trincas centrais em placas infinitas, como o comportamento de trincas de borda e outros problemas assimétricos. Para validarmos o modelo numérico, devemos usar da relação entre a Integral J e o fator de intensidade de tensões exposta na Eq. (48), comparando os valores obtidos com dados encontrados na literatura.

Todos os gráficos que se seguem apresentam a seguinte relação em sua ordenada:

$$K_{norm} = \frac{K_I}{K_0} = \frac{K_I}{\sigma_0 \sqrt{\pi a}}. \quad (89)$$

Assim, com a relação acima, podemos comparar os resultados numéricos com as soluções já conhecidas disponíveis na literatura. Os resultados dispostos a seguir estão subdivididos nas alíneas (a), com trincas centrais e (b), com trincas de borda.

(a) Resultados para a simulação de placas infinitas com trincas centrais

O problema resolvido pode ser visualizado através da Fig. 22 gerada pelo programa, que mostra o modelo discretizado da placa contendo a trinca e a abertura da mesma depois de aplicadas as tensões de tração ilustradas na Fig. 22a.

A entrada de dados nomeada de *trincacentral.m*, disponível em anexo, traz os parâmetros b , h e a , fixando a largura e altura da placa e o comprimento da trinca, respectivamente. Arbitrariamente, foi definida a largura da placa igual a uma unidade de comprimento. Como se deseja simular placas infinitas estipulou-se que a altura da placa seria de cinco vezes sua largura.

Juntamente com o fator de intensidade de tensões normalizado no eixo ordenado, escreveu-se o comprimento da trinca em função de sua largura, utilizando em seguida o parâmetro adimensional a/b para construir a curva encontrada na Fig. 23.

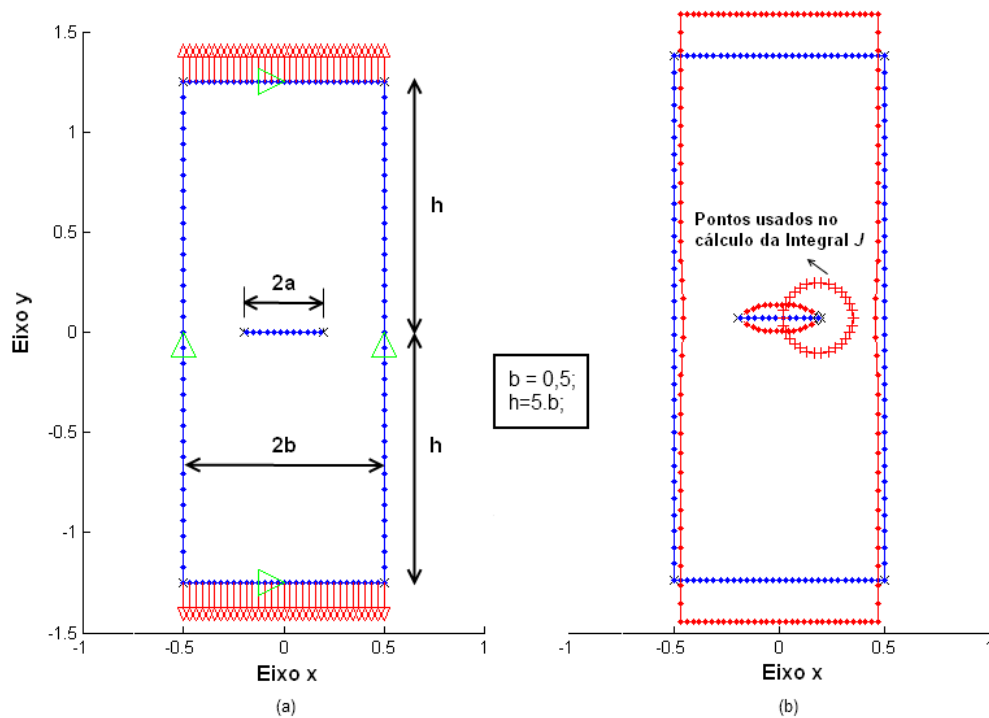


Figura 22. (a) Placa infinita com uma trinca central e (b) Abertura da trinca após a simulação

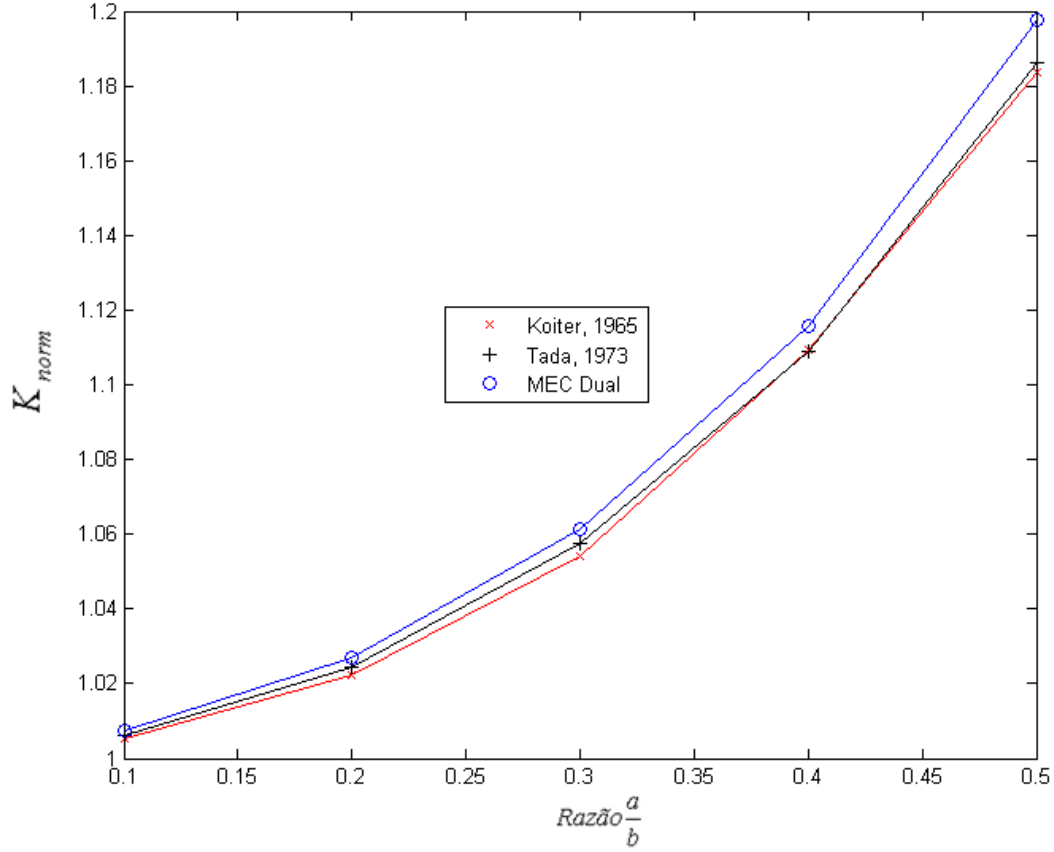


Figura 23. Gráfico de K_{norm} para trinca central em uma placa infinita

No intuito de compararmos a solução obtida pelo Método dos Elementos de Contorno Dual (MEC Dual) com as soluções teóricas já conhecidas, foram utilizadas a solução por aproximação assintótica de Koiter, publicada em 1965, e uma modificação dessa equação obtida por Tada em 1973 (Tada et al, 2000) – curvas vermelha e preta no gráfico acima, respectivamente. Essas equações estão enunciadas a seguir.

$$K_{norm_Koiter} = \frac{1 - 0,5(a/b) + 0,370(a/b)^2 - 0,044(a/b)^3}{\sqrt{1 - a/b}}, \quad (90)$$

$$K_{norm_Tada} = [1 - 0,025(a/b)^2 + 0,06(a/b)^4] \sqrt{\sec \frac{\pi a}{2b}}. \quad (91)$$

A Eq. (90) garante um erro relativo máximo igual a 1% para qualquer valor de a/b , enquanto que a Eq. (91) garante um erro relativo máximo de 0,3% para qualquer valor de a/b .

Os valores a/b usados começaram em 0,1 e foram até 0,5, com incremento de 0,1. Dessa forma, cinco pontos foram analisados. Infelizmente uma relação a/b maior que 0,6 não pode ser simulado pelo programa *dual.m* uma vez que os pontos de integração usados no cálculo da Integral J excederia os limites físicos da placa, o que provocaria resultados incoerentes. A Fig. 24 abaixo mostra a simulação e os pontos usados no cálculo da Integral J .

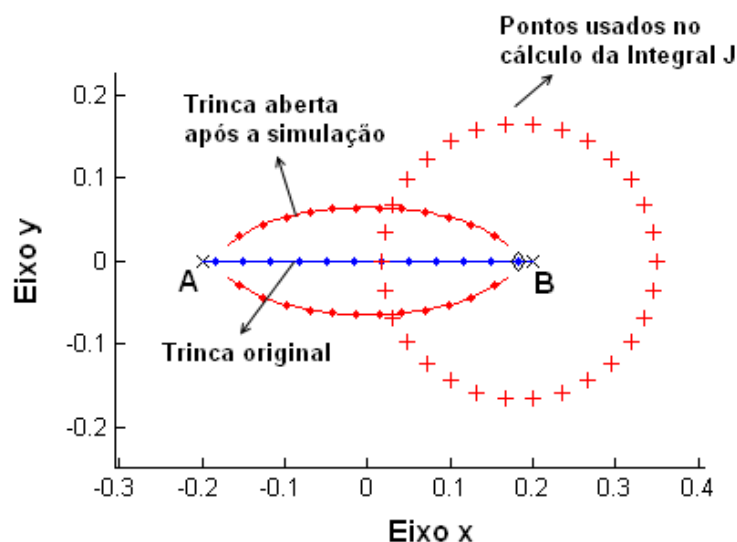


Figura 24. Abertura da trinca em detalhe (imagem gerada pelo programa *dual.m*)

É interessante observar que para a trinca simulada acima, a/b é igual a 0,4. Conforme aumentamos essa relação, a trinca cresce, aproximando, por sua vez, as pontas A e B da borda da placa. Quando a extremidade B fica próxima o suficiente para que os pontos usados no cálculo da Integral J exceda a borda da placa, os resultados obtidos não podem ser considerados confiáveis. Assim, foi usada a razão a/b variando de 0,1 a 0,5 para evitar produzir resultados inconsistentes.

A Tab. 3 apresenta os pontos usados para a construção das três curvas da Fig. 23 anteriormente apresentada. As soluções conhecidas descritas anteriormente foram implementadas em linguagem Matlab e, utilizando os mesmo parâmetros dimensionais do programa *dual.m*, os pontos para a construção dos gráficos foram obtidos. O erro máximo foi calculado com relação à solução teórica que mais se distanciou dos resultados numéricos, neste caso, a solução de Koiter.

Tabela 3. Pontos usados para a construção dos gráficos da Fig. 23

Razão a/b	Koiter (1965)	Tada (1973)	MEC Dual	Erro Máximo (%)
0,1000	1,0052	1,0060	1,0075	0,2288
0,2000	1,0224	1,0245	1,0268	0,4304
0,3000	1,0543	1,0575	1,0614	0,6734
0,4000	1,1094	1,1090	1,1156	0,5589
0,5000	1,1837	1,1862	1,1975	1,1658

(b) Resultados para simulação de placas com trincas de borda

Os parâmetros variados na simulação de placas com trincas de borda foram os mesmos que os dispostos na alínea anterior. A Fig. 23 mostra o modelo discretizado da placa contendo a trinca. O gráfico gerado nesta etapa está disposto a seguir.

Considerando tratar-se de uma trinca de borda e que o ponto usado para o cálculo da Integral J é o ponto B da Fig. 25 acima, o parâmetro adimensional a/b pôde ser variado de 0,1 a 0,7 sem o problema de exceder os limites da placa como ocorria na alínea (a).

A solução obtida pelo programa *dual.m* foi comparada com as já conhecidas soluções de Gross e Brown (1964 e 1966) e Tada (1973), cujas expressões encontram-se enunciadas abaixo (Tada et al, 2000):

$$K_{norm_Gross} = 0,265(1 - a/b)^4 + \frac{0,857 + 0,265 a/b}{(1 - a/b)^{3/2}}, \quad (92)$$

$$K_{norm_Tada} = \sqrt{\frac{2b}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{2b} \cdot \frac{0,752 + 2,02(a/b) + 0,37(1 - \sin \pi a/2b)^3}{\cos \frac{\pi a}{2b}}}. \quad (93)$$

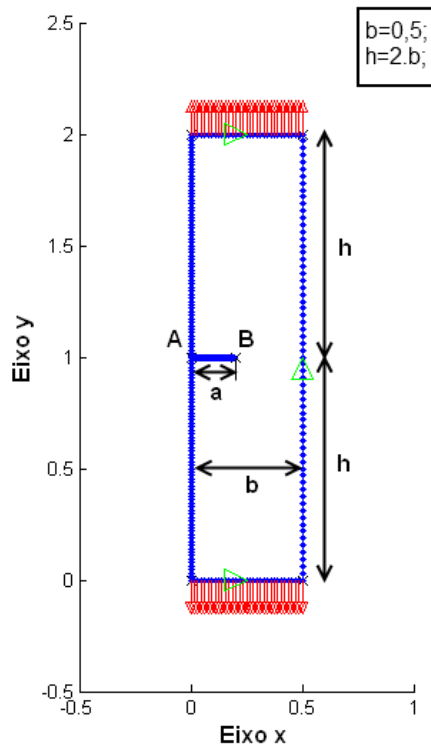


Figura 25. Placa contendo uma trinca de borda

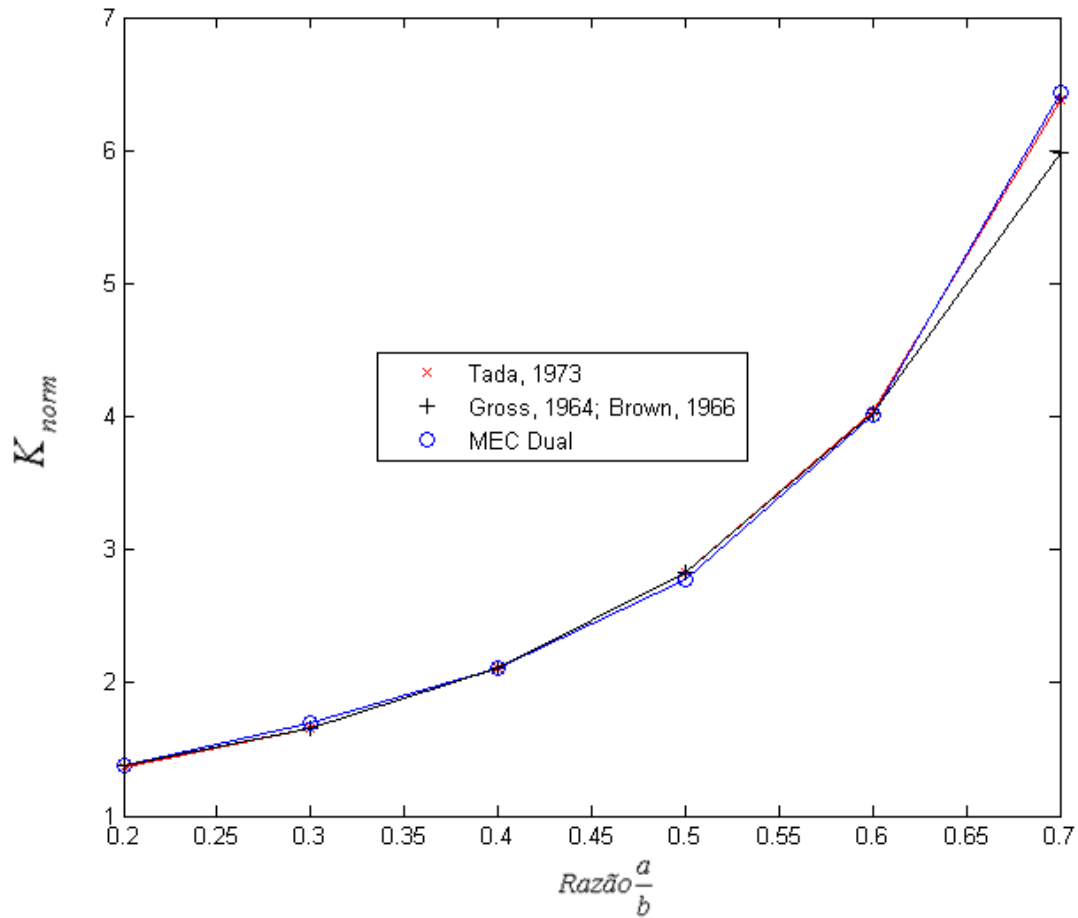


Figura 26. Gráfico de K_{norm} para trinca de borda em uma placa infinita

No gráfico acima, é possível perceber que as três curvas quase que se sobrepõem em todos os pontos, excetuando quando $a/b = 0,7$. Isso acontece porque a solução de Gross e Brown garante erro de até 0,5% para $a/b \leq 0,6$ e a solução de Tada garante erro inferior a 0,5% para $a/b \geq 0,2$. O erro máximo calculado na Tab. 4 considera a solução de Gross & Brown, uma vez que a curva em preto possui a discrepância anteriormente descrita. Os pontos usados para a construção dos gráficos se encontram na Tab. 4 abaixo.

Tabela 4. Pontos usados para a construção dos gráficos da Fig. 26

Razão a/b	Tada (1973)	Gross (1964)	MEC Dual	Erro Máximo (%)
0,2000	1,3667	1,3727	1,3770	0,7536
0,3000	1,6551	1,6621	1,6930	2,2899
0,4000	2,1080	2,1059	2,1159	0,3748
0,5000	2,8266	2,8291	2,7767	1,7654
0,6000	4,0432	4,0295	4,0174	0,6381
0,7000	6,3755	5,9780	6,4340	7,6280

4 FADIGA DOS MATERIAIS

4.1 Introdução

Um elemento de máquina pode estar submetido a dois tipos distintos de esforços mecânicos. Quando a tensão aplicada à peça é constante e evolui de forma gradual, de modo que o sentido e a magnitude da carga aplicada permaneçam constantes, diz-se que o elemento está sob *regime estático*. Quando, por algum motivo, existe uma condição que permite essas tensões flutuarem, como no caso clássico de um eixo girante submetido à flexão - que ora se sujeita a cargas de compressão, ora de tração, para cada revolução do eixo -, diz-se que o elemento está sob *esforços dinâmicos*. Tanto o regime estático quanto o dinâmico representam situações reais de engenharia.

Embora muitas vezes as tensões flutuantes aplicadas em uma determinada peça estejam abaixo do limite de resistência ao escoamento do material, é observada constantemente a ocorrência do colapso plástico do elemento mecânico. A causa dessa falha é atribuída à repetitividade dessas tensões, o que leva à atribuição do termo *falha por fadiga*.

O vocábulo *fadiga* é derivado do latim *fatigare*, que significa esgotar-se ou cansar-se, e representa exatamente o que ocorre com um material submetido a esforços cíclicos. Uma descrição específica do fenômeno pode ser encontrada no relatório técnico intitulado *General Principles for Fatigue Testing of Metals*, publicado pela ISO em 1964. O documento especifica que o fenômeno “pode ocorrer em um material metálico devido à aplicação repetida de um esforço ou deformação, embora, usualmente, esse termo se aplique especificamente a flutuações que levam à formação de trincas ou à falha mecânica” (Suresh, 1998).

Como já foi comentado anteriormente na Introdução do Capítulo 3 deste relatório, existem duas formas pelas quais uma estrutura trincada pode vir a colapsar. A primeira delas assume uma solicitação pontual, aplicada de uma só vez e com uma magnitude pré-definida; a segunda compreende a aplicação de uma tensão cíclica, com frequência e amplitude que podem ser variáveis. Essa última forma caracteriza o fenômeno de fadiga e, é exatamente sobre esse fenômeno que a segunda parte deste trabalho se concentrará.

A fadiga em materiais metálicos já vem sendo estudada desde o século XIX. O engenheiro alemão August Wohler foi um dos primeiros pesquisadores a se destacar nesse campo de estudo (Bannantine et al., 1990). Ele obteve as chamadas Curvas S-N, também conhecidas como Curvas de

Whöler, que continham a informação da tensão no eixo ordenado e o número de ciclos até a ocorrência da falha no eixo x .

A metodologia da Mecânica da Fratura foi aplicada pela primeira vez a problemas de Fadiga apenas em 1960 por Paris & Erdogan. Nessa época, foi provado que o problema de propagação de trinca por fadiga era dominado pela variação do fator de intensidade de tensão proposto por Irwin, e não pelas tensões nominais aplicadas ao corpo, muito embora tal abordagem não seja válida para todos os problemas dessa natureza (Sato, 2009).

Os tópicos subsequentes apresentarão os conceitos básicos sobre propagação de trincas por fadiga, que servirão de base para o entendimento e a formulação dos exemplos numéricos, a serem apresentados no capítulo seguinte.

4.2 Curva $S-N$

O método $S-N$ foi a primeira tentativa de compreender e quantificar de alguma forma a fadiga em materiais metálicos, sendo o método padrão de projeto por fadiga durante muito tempo. Sua formulação ainda pode ser usada para problemas de fadiga em alto ciclo, quando as tensões aplicadas à peça produzem deformações cuja componente elástica é muito maior que a componente plástica – esse tipo de carregamento aparece tipicamente em eixos de transmissão de potência, por exemplo. Para problemas de fadiga em baixo ciclo, quando as deformações possuem uma componente de deformação plástica significativa, o método da vida sob tensão ($S-N$) não é o mais indicado, devendo ser usado o método da vida sob deformação (Bannantine et al., 1990).

O exercício de classificar entre alta e baixa ciclagem vai depender do material da peça a ser estudada. Normalmente, fadiga de alto ciclo é empregada para uma ciclagem superior a 10^3 ciclos (Shigley et al, 2003).

O procedimento mais comum para a construção da curva $S-N$ é a realização do ensaio de viga rotativa pensado por R. R. Moore, que utiliza dois pontos de carregamento para aplicar um momento fletor constante a um eixo rotativo, no qual uma vez aplicado o carregamento, o número de inversões de tensão são registradas até a ocorrência da falha. Para a realização desse ensaio, o espécime deve ser cuidadosamente usinado e polido uniaxialmente, de modo a evitar riscos em sua circunferência.

A tensão utilizada no ensaio inicia sempre inferior à resistência última do material e vai decrescendo à medida que a ciclagem aumenta, até atingir-se a falha. A curva é então construída geralmente em uma grade *log-log* ou *semilog*, a fim de enfatizar sua flexão, dispondo a resistência à fadiga no eixo y e o número de ciclos até a falha no eixo x , determinando, desta forma, o limite de resistência à fadiga do material do corpo de prova. Um exemplo de curva $S-N$ pode ser encontrado a seguir.

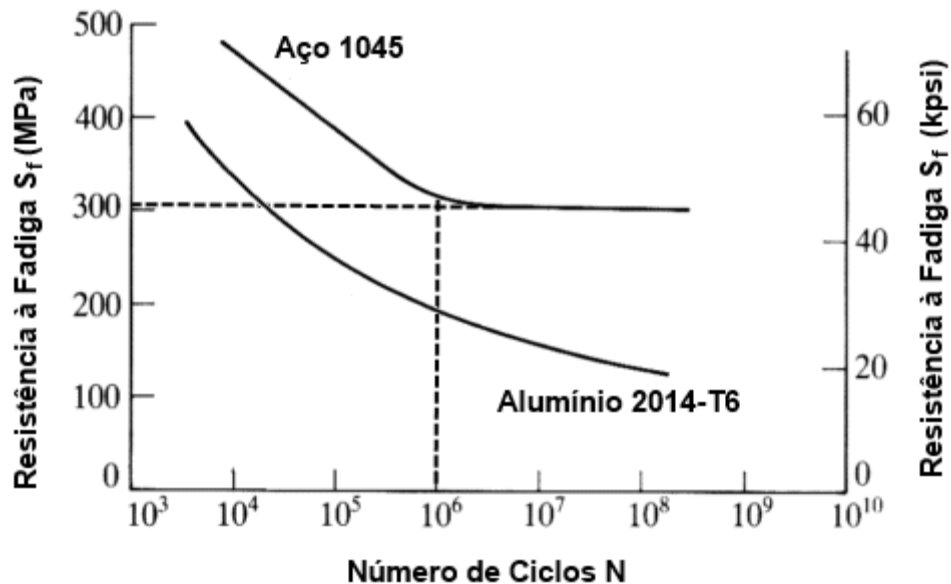


Figura 27. Curva $S-N$ para o aço 1045 e Alumínio 2014-T6

Nem sempre é possível determinar o limite de resistência à fadiga de um material. Normalmente, metais cujo empacotamento é do tipo cúbico de corpo centrado possuem um limite de resistência à fadiga. Tal grandeza é comumente denotada por S_e (para o caso acima, $S_e \cong 300 \text{ MPa}$), e representa o nível de tensão que o corpo de prova fabricado com esse material é submetido até o momento da falha, no limite para quando a vida do elemento é infinita – limite esse que, para termos de engenharia, assume o valor de um milhão de ciclos, como representado no gráfico da Fig. 27. Além desse limite, a falha não ocorrerá, independentemente do número de ciclos.

Para metais não-ferrosos ou ligas, a curva $S-N$ jamais se torna horizontal - caso do alumínio, ilustrado na Fig. 27, de modo que a resistência à fadiga desses materiais não apresenta um limite definido, sendo normalmente tomado para $N = 5(10^8)$ ciclos.

É interessante observar que as curvas $S-N$ são obtidas sob condições específicas, utilizando corpos de prova com excelente acabamento superficial, o que nos leva a concluir que os dados obtidos experimentalmente através dos ensaios de viga rotativa deverão ser corrigidos para adaptar as condições ideais do laboratório, no sentido de considerar as discrepâncias correspondentes às aplicações reais. Tais adaptações são feitas através dos fatores de correção do limite de resistência à fadiga, que leva em consideração efeitos de geometria, carregamento, acabamento, entre outros.

4.2.1 Limite de Resistência à Fadiga

Nem sempre é possível realizar os ensaios necessários para determinar o limite de resistência à fadiga. É importante que consigamos, portanto, uma estimativa inicial para tal grandeza. Inúmeros ensaios de tração foram realizados utilizando a mesma geometria dos ensaios de viga rotativa. Dessa forma, é possível comparar os conjuntos de resultados a fim de correlacionar ambas as grandezas.

O limite de resistência à fadiga se relaciona com o limite de resistência à tração seguindo as relações dispostas abaixo (Bannantine et al., 1990):

$$S_e \approx 0,5S_{ut} , \text{ para } S_{ut} \leq 200 \text{ ksi.} \quad \text{Se, } S_{ut} > 200 \text{ kpsi, } S_e \approx 100 \text{ ksi.} \quad (94)$$

O nível de tensão alternada correspondente a 1000 ciclos de carregamento (S_{1000}) pode ser estimado como sendo 90% da resistência à tração do material. Um gráfico contendo a relação entre ambos os limites está disposto a seguir.

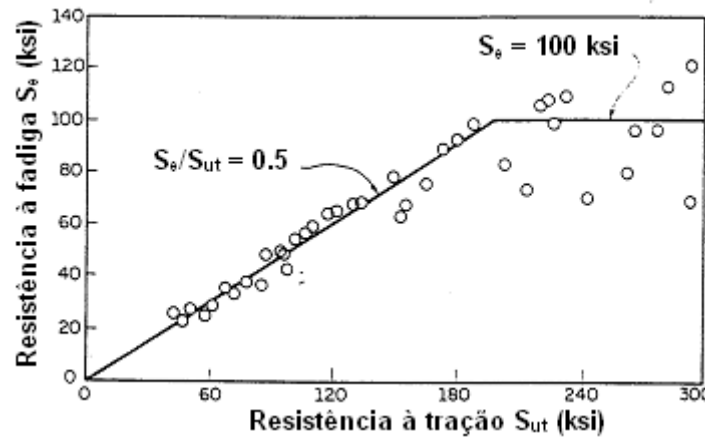


Figura 28. Relação entre resistência à fadiga e resistência à tração para aços forjados (Bannantine et al., 1990)

Eis as equações que descrevem o comportamento da curva acima:

$$S = 10^C N^b, \text{ (para } 10^3 < N < 10^6), \quad (95)$$

onde os expoentes C e b são determinados de acordo com dois pontos definidos na Fig. 29 (Bannantine et al., 1990).

$$b = -\frac{1}{3} \log_{10} \frac{S_{1000}}{S_e} \quad ; \quad C = \log_{10} \frac{(S_{1000})^2}{S_e}. \quad (96)$$

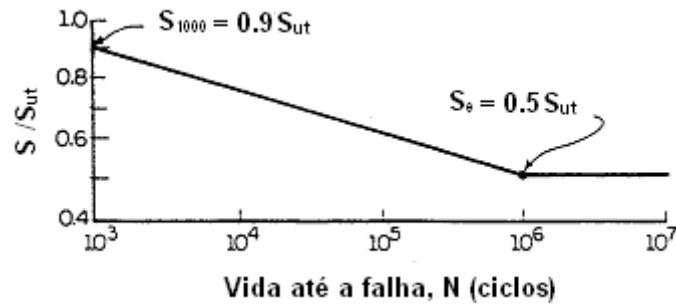


Figura 29. Curva $S-N$ para metais forjados em grade log-log (Bannantine et al., 1990)

Com as relações anteriores, podemos escrever uma equação para o número de ciclos em função da tensão alternada S :

$$N = 10^{-C/b} S^{1/b}, \quad (\text{para } 10^3 < N < 10^6). \quad (97)$$

Substituindo ainda as relações $S_{1000} \approx 0,9S_{ut}$ e $S_e \approx 0,5S_{ut}$, podemos escrever a equação da curva $S-N$ para o aço como sendo:

$$S = 1,62S_{ut}N^{-0,085} \quad (98)$$

É importante observar que as relações aqui apresentadas são estimativas obtidas através de uma análise empírica e estatística e, dependendo da aplicação, testes experimentais deverão ser realizados. Outra característica que vale destacar diz respeito à ciclagem; as equações anteriores não aproximam de forma satisfatória o comportamento de peças com vida inferior a 1000 ciclos, devendo ser usado outro método de análise em casos como esse.

4.3 Curva $da/dN \times \Delta K$

4.3.1 Lei de Paris

Os primeiros estudos de fadiga não consideravam fatores como o modo de carregamento, comentado no tópico 3.2.4 deste trabalho, e imperfeições microscópicas que pudessem estar presentes no material cuja peça havia sido carregada. Tentava-se determinar a vida em fadiga através de parâmetros globais, como a tensão e deformação (Gdoutos, 2005). Foi apenas na década de 60 que um grupo de pesquisadores demonstrou que a Mecânica da Fratura era a ferramenta mais indicada para modelar a propagação de trincas por fadiga em materiais metálicos (Paris & Erdogan, 1960; Paris et al., 1961). Tal problemática deixava de ser relacionada com aqueles fatores globais, passando a ser considerada a variação do fator de intensidade de tensão (ΔK), muito embora tal abordagem ainda tenha suas limitações, não sendo válida à totalidade dos casos.

O fenômeno de fadiga passou a ser melhor compreendido, sendo modelado em dois momentos distintos: no surgimento da trinca por fadiga e na propagação dessa trinca. O primeiro é analisado a nível microscópico, enquanto a mecânica do contínuo é usada para o estudo de propagação de trincas. A necessidade de correlacionar essas duas abordagens aumentou na medida em que a teoria vigente não conseguia explicar a discrepância entre as falhas macroscópicas e microscópicas (Gdoutos, 2005).

Normalmente, quando uma peça é submetida a esforços cíclicos, energia é acumulada na vizinhança de falhas microscópicas provenientes, muitas vezes, dos processos de fabricação dos materiais; essas falhas crescem e coalescem, formando trincas microscópicas. Eventualmente, essas micro trincas crescem até que seja possível descrever seu comportamento por meio dos princípios da mecânica do contínuo. Tais falhas são chamadas, finalmente, de macro trincas ou, simplesmente, trincas.

Após o surgimento da trinca por fadiga, uma propagação estável se inicia, permanecendo até que a trinca atinja um tamanho crítico, levando a peça à falha catastrófica. Assim, podemos identificar três estágios distintos que compreendem a vida em fadiga do elemento, todos representados na Fig. 30: a região *I* é aquela onde a propagação é bem lenta, e se inicia após o fator de intensidade de tensão ultrapassar um determinado limite inferior (ΔK_{th}); na região *II* acontece a propagação estável da trinca, na qual é utilizada a abordagem proposta por Paris & Erdogan (1960); na região *III*, a taxa de propagação cresce rapidamente, culminando na fratura do material, ou seja, o fator de intensidade de tensão ultrapassa um limite superior (K_{Ic}), chamado tenacidade à fratura.

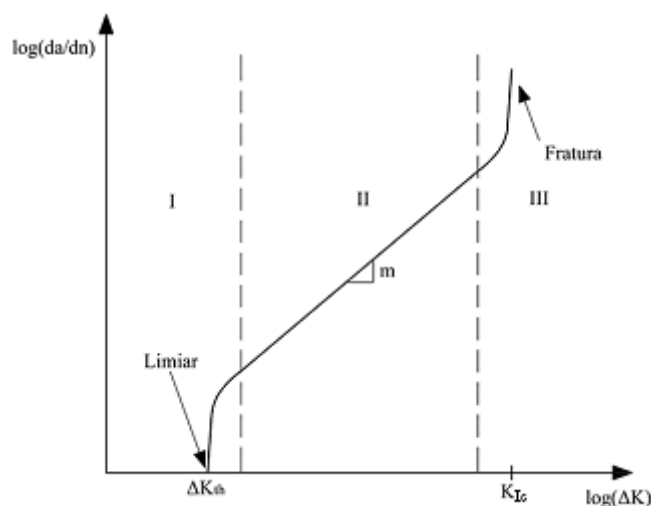


Figura 30. Comportamento típico da propagação de trincas por fadiga em metais (Sato, 2009)

Neste ponto, é interessante lembrar que o fator de intensidade de tensão se define como um parâmetro capaz de definir o comportamento de trincas distintas, de modo que caso o fator de intensidade de tensão de duas trincas completamente diferentes seja o mesmo, ambas apresentarão a

mesma distribuição de tensão nas proximidades da ponta da trinca, independentemente de parâmetros individuais como geometria e tensão nominal aplicada. Tal característica também estará presente no estudo de propagação de trincas.

A abordagem representada pela Fig. 30 é baseada no conceito de similaridade (do inglês, *similitude*), que, em termos de engenharia, é um conceito normalmente aplicado para estabelecer o elo entre o modelo simulado em laboratório e o objeto real, em condições normais de operação. Tal hipótese, aplicada à propagação de trincas, utiliza o fator de intensidade de tensão como parâmetro de similaridade, assim, duas trincas diferentes com o mesmo ΔK irão se propagar na mesma velocidade (Anderson, 1995). A hipótese de similaridade permite utilizar os ensaios de laboratório para determinar o comportamento dos materiais em condições de operação, entretanto, tal abordagem não é válida para todos os casos, tais como: região I da curva da Fig. 30 e para propagação de trincas muito pequenas (Jones et al., 2007). Nesses casos, faz-se necessário a aplicação de outros modelos.

Considerando válida a hipótese da similaridade para uma situação em que uma trinca se propaga devido a um carregamento cíclico, com variação de amplitude constante dos fatores de intensidade de tensão, K_{\min} e K_{\max} , sendo que as deformações plásticas nas proximidades da ponta da trinca são desprezíveis, pode-se afirmar que as condições na ponta da trinca são definidas apenas pelo fator de intensidade de tensão K , sendo a taxa de propagação da trinca caracterizada por K_{\min} e K_{\max} (Sato, 2009). Assim, podemos escrever uma equação para a propagação da trinca como sendo (Anderson, 1995):

$$\frac{da}{dN} = f_1(\Delta K, R), \quad (99)$$

onde $\Delta K \equiv K_{\max} - K_{\min}$, $R \equiv K_{\min}/K_{\max}$ e da/dN é a propagação da trinca por ciclo.

As expressões para f_1 foram obtidas por inúmeros pesquisadores por meio de observações empíricas. Cada uma das variações da Eq. (99) tenta descrever o comportamento da curva da/dN vs. ΔK , ilustrada na Fig. 30, utilizando parâmetros de ajuste anteriormente apresentados, como a tenacidade à fratura, o limiar da amplitude do fator de intensidade de tensão, K_{Ic} e ΔK_{th} , respectivamente, e a razão de carga R entre os fatores de intensidade de tensão máximo e mínimo.

Um dos primeiros modelos matemáticos de propagação de trincas por fadiga foi proposto por Head (1953). Ele trabalhou com o problema clássico de placa plana infinita com uma trinca central, chegando na seguinte equação (Gdoutos, 2005):

$$\frac{da}{dN} = CK_I^3. \quad (100)$$

Na equação anterior, C representa uma constante que depende das propriedades mecânicas do material a ser determinado experimentalmente.

Uma das expressões mais utilizadas no estudo de propagação de trincas foi proposta em 1960 por Paris & Erdogan, comumente conhecida como “*Lei de Paris*”:

$$\frac{da}{dN} = C \cdot \Delta K^m, \quad (101)$$

A expressão acima é válida apenas para a região *II* do gráfico da Fig. 30, e não considera os efeitos provenientes da razão de carga R . Os fatores C e m são constantes obtidas experimentalmente, o primeiro representa o coeficiente linear do trecho reto da curva da Fig. 30, tendo o mesmo significado que o da Eq. (101); já o expoente m denota o coeficiente angular do mesmo trecho. Ambos os parâmetros dependem do material utilizado nos testes. Inicialmente fora proposto um valor empírico para o expoente m como sendo igual a quatro, entretanto, pesquisas posteriores revelaram que tal valor pode variar de dois a sete, dependendo do tipo de material.

Embora a Eq. (101) seja a primeira a modelar o comportamento da curva da Fig. 30 de forma satisfatória, muitas pesquisas posteriores se concentraram em propor novas soluções que aproximem não só a região *II*, como as demais regiões da curva supracitada. O subitem seguinte apresenta algumas dessas outras soluções.

4.3.2 Soluções Empíricas para Descrever o Crescimento de Trincas por Fadiga

Uma vez que a Eq. (201) não considera o crescimento da trinca para valores altos e baixos de ΔK (região *I* e *III*, respectivamente), Forman et al. (1967) propuseram uma expressão para modelar o caso em que $K_{m\acute{a}x}$ se aproxima do limite superior K_{Ic} (região *III*):

$$\frac{da}{dN} = \frac{C(\Delta K)^n}{(1 - R)K_{Ic} - \Delta K}, \quad (102)$$

onde R é a razão de carga e C e n são constantes que dependem do material. Uma forma mais conveniente de escrever a equação acima vem a ser:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C(\Delta K)^{n-1}}{\left(\frac{K_{Ic}}{K_{m\acute{a}x}} - 1\right)}. \quad (103)$$

Na expressão anterior, fica claro que a taxa de propagação tende a infinito na medida em que $K_{m\acute{a}x}$ se aproxima de K_{Ic} , indicando o início da instabilidade.

Para baixos valores de ΔK (região *I* da Figura 30), Donahue et al. (1972) trouxeram a seguinte relação (Gdoutos, 2005):

$$\frac{da}{dN} = K(\Delta K - \Delta K_{th})^m, \quad (104)$$

onde ΔK_{th} denota um valor inicial de ΔK . De acordo com Klesnil & Lucas (1972):

$$\Delta K_{th} = (1 - R)^\gamma \Delta K_{th(0)}, \quad (105)$$

onde $\Delta K_{th(0)}$ é o valor inicial para quando $R = 0$ e γ é uma propriedade do material.

Walker (1970) também propôs um modelo para tratar a região II, entretanto, sua solução já incorpora os efeitos da razão de carga R , ao contrário do modelo original proposto por Paris & Erdogan (Sato, 2009):

$$\frac{da}{dN} = C \cdot \Delta K^{(m+p)} \left(\frac{1}{1-R} \right)^p. \quad (106)$$

Na equação acima, além dos parâmetros originais C e m , há a inclusão de um parâmetro adicional de correção p .

Walker deduziu, seis anos mais tarde, em um trabalho conjunto com Priddle (1976), uma expressão para tratar todas as regiões da Fig. 30, todavia sem considerar os efeitos da razão de carga:

$$\frac{da}{dN} = C \left(\frac{\Delta K - \Delta K_{th}}{K_{Ic} - K_{máx}} \right). \quad (107)$$

Dowling et al. (1976), em uma completa analogia à Lei de Paris, incorporou o conceito da Integral J na expressão original (Gdoutos, 2005):

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta J)^m. \quad (108)$$

4.4 Modelo de Fechamento de Trinca Induzido por Plasticidade

O estudo de propagação de trincas por fadiga realizado até o momento considerou apenas situações de carregamento cíclico com amplitude constante. Ainda que esse tipo de carregamento ocorra em ocasiões práticas, a grande maioria das estruturas submetidas a esforços cíclicos estão sob influência de flutuações complexas de carregamento. Diferentemente do caso em que ΔK cresce gradualmente conforme a trinca se propaga, mudanças bruscas no carregamento podem levar a efeitos mais complexos no que concerne a propagação dessa trinca, devendo ser considerados a fim de que o modelo se aproxime cada vez mais do fenômeno físico em questão.

No começo da década de 1960, alguns experimentos demonstraram que a aplicação de uma sobrecarga de tensão sob um carregamento cíclico com amplitude constante levava a um retardamento no crescimento da trinca presente naquele corpo de prova. A explicação para o fenômeno viria da

análise do comportamento da zona de deformação plástica à frente da ponta da trinca. Após a aplicação da sobrecarga de tensão, o material elástico (não deformado plasticamente) em torno da zona plástica criava tensões residuais compressivas, tendendo a fechar a trinca, retardando, assim, seu crescimento.

Já na década de 1970, Elber³ publicou dois estudos nos quais um modelo matemático que levava em consideração o efeito descrito acima fora proposto. O pesquisador mostrou que o fechamento da trinca induzido por plasticidade era responsável pela diminuição da propagação, e por um consequente retardo na curva do número de ciclos por comprimento da trinca; as tensões residuais compressivas apareciam no momento do descarregamento, o que ocasionaria justamente uma redução da severidade do processo.

Uma vez determinado que o efeito do fechamento da trinca era constante ao longo da propagação, houve a introdução de um novo ΔK (Gdoutos, 2005):

$$\Delta K_{eff} = K_{m\acute{a}x} - K_{op} , \quad (109)$$

onde ΔK_{eff} é denominado fator de intensidade de tensões efetivo, $K_{m\acute{a}x}$ é o fator de intensidade de tensões devido a aplicação da máxima tensão no corpo e K_{op} denota o fator de intensidade de tensões necessário para provocar a abertura completa da trinca.

Utilizando a Eq. (109), pode-se adaptar a Lei de Paris ou qualquer outro modelo que contabilize o fator de intensidade de tensões para estimar a taxa de propagação da trinca por fadiga. Modificando a Eq. (101), teremos:

$$\frac{da}{dN} = C(U\Delta K)^m, \quad (110)$$

$$\text{onde } U = \frac{K_{m\acute{a}x} - K_{op}}{K_{m\acute{a}x} - K_{m\acute{i}n}}, \Delta K = K_{m\acute{a}x} - K_{m\acute{i}n}. \quad (111)$$

Inúmeras relações empíricas foram propostas para a determinação de U . Elber propôs a seguinte expressão:

$$U = 0,5 + 0,4R, \quad (112)$$

onde $R = K_{m\acute{a}x}/K_{m\acute{i}n}$ para $-0,1 \leq R \leq 0,7$.

Diferentemente da relação linear obtida por Elber, Schijve, em 1981, obteve uma expressão quadrática para U :

³ Elber, W. "Fatigue crack closure under cyclic tension", **Engineering Fracture Mechanics** 2, 1970, pp. 37-45.

Elber, W. "Equivalent constant-amplitude concept for crack growth under spectrum loading", **Fatigue Crack Growth Under Spectrum Loads, ASTM STP 595**, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1976, pp. 236-250.

$$U = 0,55 + 0,33R + 0,12R^2, \quad (113)$$

sendo válida para $-1,0 \leq R \leq 0,54$.

O programa para simulação de propagação de trincas por fadiga utilizado neste trabalho fez uso dos valores de U segundo as Equações (112) e (113) para o modelo de fechamento de trinca induzido por plasticidade.

4.5 Estimativa de Vida em Fadiga

A questão principal no estudo de propagação de trincas, na qual a Região II representa a maior parte da vida em fadiga da maioria dos materiais usados para compor estruturas, vem a ser a correta determinação do número de ciclos N requeridos para que uma trinca com um tamanho inicial a_0 cresça até um determinado tamanho crítico a_c , na medida em que $a = a(N)$.

Na Fig. 31, a_i representa uma trinca grande o suficiente para a aplicação dos conceitos de Mecânica da Fratura, mas muito pequena para ser detectada e a_1 representa o limite para a inspeção não destrutiva. A trinca cresce lentamente até o ponto a_r , que representa o final de sua vida útil; a partir desse ponto, a trinca se propaga rapidamente até atingir o limite a_f , onde a falha catastrófica se inicia.

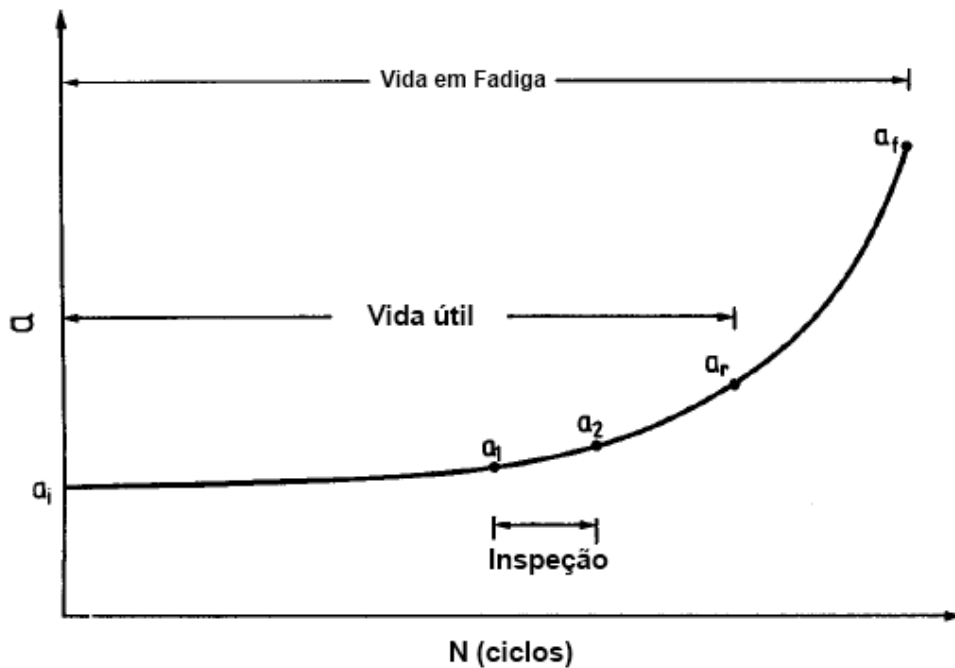


Figura 31. Tamanho da trinca por número de ciclos para carregamento cíclico constante (Gdoutos, 2005)

Uma trinca em um componente estrutural submetido a carregamento cíclico convergirá à falha catastrófica no momento em que essa trinca atingir seu comprimento crítico a_f , diante de um determinado número de ciclos. O objetivo do estudo de propagação de trincas por fadiga é a determinação do tamanho crítico da trinca a_c , como função do número de ciclos N .

Quando a natureza das tensões aplicadas e a expressão para o fator de intensidade de tensão são conhecidos, uma das soluções empíricas apresentadas no tópico 4.3.2 deste relatório pode ser aplicada para a determinação da vida em fadiga do componente estrutural (Gdoutos, 2005).

Consideremos uma placa plana infinita submetida a tensões cíclicas com uma trinca de comprimento $2a_0$ em modo I . O fator de intensidade de tensões será:

$$K = f(a)\sigma\sqrt{\pi a}, \quad (114)$$

onde $f(a)$ é uma função que depende da posição da trinca, sendo igual à unidade para trinca central e 1,12 para o caso de uma trinca de borda, ambas em uma placa infinita.

A estimativa da vida em fadiga é calculada integrando a Lei de Paris (Equação 101), reproduzida abaixo por conveniência.

$$\frac{da}{dN} = C \cdot \Delta K^m. \quad (115)$$

A fim de obtermos o número de ciclos para a trinca se propagar até um determinado tamanho a , fazemos:

$$dN = \frac{da}{C \Delta K^m}. \quad (116)$$

Integrando a equação acima, obtemos:

$$N - N_0 = \int_{a_0}^a \frac{da}{C \Delta K^m}, \quad (117)$$

onde N_0 denota o número de ciclos de carregamento correspondente à metade do comprimento inicial da trinca a_0 . A Regra do Trapézio pode ser usada para integrar a equação acima, desta forma, teremos:

$$N - N_0 = \frac{(a - a_0)}{2} \frac{1}{C} \left\{ \frac{1}{[\Delta K(a_0)]^m} + \frac{1}{[\Delta K(a)]^m} \right\}. \quad (118)$$

Na Eq. (109), $(a - a_0)$ representa o incremento pelo qual a trinca se propaga. $\Delta K(a_0)$ e $\Delta K(a)$ representam a magnitude dos fatores de intensidade de tensão para quando a trinca possui comprimento igual a a_0 e a , respectivamente. Um dos critérios para a determinação das amplitudes dos fatores de intensidade de tensão foi proposto por Tanaka (1974) e possui boa concordância com resultados experimentais (Sato, 2009). O critério adota um valor de K efetivo, denotado por K_{ef} :

$$\Delta K_{ef} = \sqrt{\Delta K_I^2 + 2\Delta K_{II}^2}. \quad (119)$$

Usando a definição anterior junto à Eq. (114), teremos:

$$N - N_0 = \frac{(a - a_0)}{2} \frac{1}{C} \left\{ \frac{1}{[\Delta K_{ef}(a_0)]^m} + \frac{1}{[\Delta K_{ef}(a)]^m} \right\}. \quad (120)$$

4.6 Métodos para Determinar a Direção da Propagação da Trinca

Embora tenhamos calculado, na primeira metade deste trabalho, o fator de intensidade de tensão em modo *I*, é muito comum que os carregamentos aplicados a estruturas não aconteçam no plano normal. Geralmente, o esforço ocorre em um plano intermediário, sendo dominado não apenas pelos fatores de intensidade de tensão K_I , K_{II} ou K_{III} de forma independente, mas por uma combinação desses.

Existem vários métodos para determinar a direção de propagação da trinca em uma simulação numérica. De todos, talvez os mais utilizados sejam o critério da Máxima Tensão Circunferencial e o critério da Mínima Densidade de Energia de Deformação. Ambos são detalhados a seguir.

4.6.1 Critério da Máxima Tensão Circunferencial

Proposto por Erdogan & Sih em 1963, o critério da Máxima Tensão Circunferencial (MTC) é baseado na hipótese de que a propagação ocorre na direção ortogonal à máxima tensão principal na ponta da trinca (Sato, 2009). Os campos de tensão e deslocamento foram apresentados no tópico 3.2.6 deste trabalho, entretanto, devemos definir a distribuição de tensões para um carregamento misto em modo *I* e *II*. Como já foi comentado, a solução para o modo misto é obtida através do Princípio da Superposição Linear (Anderson, 1995), já definido pela Eq. (45) e reproduzida em seguida por conveniência:

$$\sigma_{ij}^{total} = \sigma_{ij}^I + \sigma_{ij}^{II} + \sigma_{ij}^{III}. \quad (121)$$

$$\sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \right\}, \quad (122)$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \right\}, \quad (123)$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right], \quad (124)$$

$$\sigma_{11} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ -\operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \left[2 + \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{3\theta}{2} \right) \right] \right\}, \quad (125)$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left[\operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{3\theta}{2} \right) \right], \quad (126)$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \left[1 - \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{3\theta}{2} \right) \right] \right\}. \quad (127)$$

Usando as Equações (32), (33), (34), (37), (38) e (39), renumeradas acima, respectivamente, obtemos a solução em modo misto (*I* e *II*), expressa nas Equações (128), (129) e (130) dispostas a seguir.

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = & \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \left[1 - \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{3\theta}{2} \right) \right] \right\} + \\ & - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ -\operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \left[2 + \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{3\theta}{2} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (128)$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \left[1 + \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{3\theta}{2} \right) \right] \right\} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left[\operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{3\theta}{2} \right) \right], \quad (129)$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{3\theta}{2} \right) \right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \left[1 - \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{3\theta}{2} \right) \right] \right\}. \quad (130)$$

Faz-se interessante reescrevermos as expressões anteriores em coordenadas polares. Desta forma, as Equações (128), (129) e (130) se tornam (Sato, 2009):

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \left\{ K_I \left[1 + \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] + \frac{3}{2} K_{II} \operatorname{sen}(\theta) - 2K_{II} \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) \right\}, \quad (131)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \left[K_I \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) - \frac{3}{2} K_{II} \operatorname{sen}(\theta) \right], \quad (132)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \{ K_I \operatorname{sen}(\theta) + K_{II} [3 \cos(\theta) - 1] \}. \quad (133)$$

Para que a tensão $\sigma_{\theta\theta}$ seja máxima, conforme a hipótese supracitada, $\sigma_{r\theta}$ tem de ser nula. Aplicando tal condição na Eq. (133), tem-se duas situações que originam uma solução trivial e outra não trivial, expressas a seguir, respectivamente.

$$\text{Solução trivial:} \quad \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0 \quad \therefore \quad \theta = \pm\pi, \quad (134)$$

$$\text{Solução não trivial:} \quad K_I \sin(\theta) + K_{II}[3 \cos(\theta) - 1] = 0. \quad (135)$$

Analisemos agora a Eq. (134) para os modos *I* e *II* em separado. Para o modo *I* puro, $K_{II} = 0$, daí, decorre:

$$K_I \sin(\theta) = 0 \quad \therefore \quad \theta = 0^\circ. \quad (136)$$

Para o modo *II* puro, $K_I = 0$, portanto:

$$K_{II}[3 \cos(\theta) - 1] = 0 \quad \therefore \quad \theta = \pm 70,54^\circ. \quad (137)$$

A solução para o modo misto, em análise à Eq. (135), está expressa a seguir (Broek, 1986):

$$\theta = 2 \arctg \left[\frac{1}{4} \frac{K_I}{K_{II}} \pm \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2 + 8} \right]. \quad (138)$$

A determinação do sinal de θ na Eq. (138) depende diretamente do sinal de K_{II} , na medida em que (Sato, 2009):

$$\theta = 2 \arctg \left[\frac{1}{4} \frac{K_I}{K_{II}} - \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2 + 8} \right] \rightarrow K_{II} > 0, \quad (139)$$

$$\theta = 2 \arctg \left[\frac{1}{4} \frac{K_I}{K_{II}} + \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2 + 8} \right] \rightarrow K_{II} < 0. \quad (140)$$

É interessante observar que o ângulo θ é determinado segundo a orientação do sistema de coordenadas ilustrado na Fig. 9.

Como já foi comentado no tópico 3.3, para o caso em que ocorra elevada plasticidade na ponta da trinca, a teoria prevista pela Mecânica da Fratura Linear Elástica não conseguirá prever com exatidão o comportamento mecânico do material submetido a tais tensões e, por conseguinte, as expressões descritas anteriormente não produzirão resultados confiáveis. Deste modo, tais equações devem ser usadas apenas para modelar trincas cujo tamanho, ou as tensões nelas aplicadas, não estejam associadas à alta plasticidade.

4.6.2 Critério da Mínima Densidade de Energia de Deformação

O critério da Mínima Densidade de Energia de Deformação (Sih, 1973)⁴ leva em consideração o campo de energia ao redor da ponta da trinca e se define como sendo uma alternativa eficaz na determinação da direção de propagação da trinca em problemas de propagação de trinca em duas e três dimensões, trincas em materiais compósitos, problemas dinâmicos, entre outros (Gdoutos, 2005).

Essa análise considera um parâmetro denominado Fator de Densidade de Energia de Deformação S . Tal fator não considera apenas a magnitude das tensões distribuídas na ponta da trinca; diferentemente no fator de intensidade de tensão K , o parâmetro S possui sensibilidade direcional, podendo ser comparado a uma grandeza vetorial, enquanto K , de forma análoga, seria um escalar (Sato, 2009).

O conceito fundamental dessa análise avalia o contínuo como uma soma de volumes unitários de material, cada qual com a capacidade de armazenar uma determinada quantidade de energia em um específico instante de tempo. Essa quantidade diferencial de energia por unidade de volume é referida como sendo a função densidade de energia de deformação dW/dV , e varia de um local para outro em todo o domínio do material.

$$\frac{dW}{dV} = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + f(\Delta T, \Delta C), \quad (141)$$

onde ΔT e ΔC representam as flutuações de temperatura e concentração da mistura, respectivamente e σ_{ij} e ε_{ij} as componentes de tensão e deformação, respectivamente. Em análise a Eq. (141) acima, podemos perceber que caso a tensão aplicada ao elemento seja nula, sua densidade de energia ainda é diferente de zero; isso demonstra que um elemento material pode conter energia mesmo não havendo qualquer tensão aplicada.

Historicamente, a quantidade de energia foi utilizada para definir o momento da falha por escoamento de um elemento material. Sob esse ponto de vista, a falha por escoamento ocorre quando a energia total de deformação por unidade de volume absorvida se iguala a energia por unidade de volume estocada pelo material carregado por tensão uniaxial no momento do escoamento. Tal quantidade corresponde a um limitante de energia de deformação, funcionando como uma constante do material (Gdoutos, 2005).

Para um material linear elástico, a função descrita anteriormente toma a forma:

$$\frac{dW}{dV} = \frac{1}{2E} (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11}) + \quad (142)$$

⁴ Sih, G. "Energy-density concept in fracture mechanics". **Engineering Fracture Mechanics**, 1973, p. 1037 – 1040.

$$+ \frac{1}{2\mu} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2),$$

onde σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} , σ_{12} , σ_{23} e σ_{31} são componentes de tensão, ν a razão de Poisson, E o Módulo de Young e μ é o Módulo de Elasticidade Transversal, no qual, $E = 2\mu(1 + \nu)$.

Para problemas de elasticidade plana, a Eq. (142) pode ser reescrita como:

$$\frac{dW}{dV} = \frac{1}{4\mu} \left[\frac{\kappa + 1}{4} (\sigma_{11} + \sigma_{22})^2 - 2(\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2) \right], \quad (143)$$

onde $\kappa = 3 - 4\nu$ para condição de deformação plana e $\kappa = (3 - \nu) / (1 + \nu)$ para tensão plana.

O critério da Mínima Densidade de Energia de Deformação (MDED) é apresentado mediante três hipóteses estabelecidas a seguir, e se aplica a todos os tipos de materiais (de comportamento elástico ou plástico), carregamentos (constante ou cíclico) e geometrias, considerando ou não falhas iniciais pertencentes ao material. Tais hipóteses independem do tipo de material ou das restrições induzidas pelas equações constitutivas. A função densidade de energia de deformação dW/dV decai com a distância r da ponta da trinca (Gdoutos, 2005). Assim, pode-se definir:

$$\frac{dW}{dV} = \frac{S}{r}, \quad (144)$$

onde S é o fator Densidade de Energia de Deformação e r é o raio medido a partir do local do provável início da falha.

O fator S pode ser escrito na forma $S = r(dW/dV)$, podendo ser interpretado como a liberação local de energia para um segmento de propagação r . Para problemas de elasticidade plana linear, podemos substituir as Equações (128), (129) e (130) na Eq. (143), obtendo, por conseguinte (Sato, 2009):

$$S = a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2, \quad (145)$$

onde os coeficientes a_{ij} ($i, j = 1, 2$) são dados por:

$$a_{11} = \frac{1}{16\mu} [1 + \cos(\theta)][\kappa - \cos(\theta)], \quad (146)$$

$$a_{12} = \frac{1}{16\mu} \sin(\theta)[2 \cos(\theta) - (\kappa - 1)], \quad (147)$$

$$a_{22} = \frac{1}{16\mu} \{(\kappa + 1)[1 - \cos(\theta)] + [1 + \cos(\theta)][3 \cos(\theta) - 1]\}. \quad (148)$$

As três hipóteses relacionadas ao fator S estão descritas abaixo:

- Hipótese I: A localização da trinca coincide com a localização da mínima Densidade de Energia de Deformação relativa $(dW/dV)_{\min}$, e o escoamento, com a máxima $(dW/dV)_{\max}$. Para a simulação de propagação da trinca, considera-se que a direção de propagação coincide com a posição, em uma região circunferencial de raio r , onde S atinge o seu valor mínimo, ou seja, na ponta de trinca (Sato, 2009).
- Hipótese II: A falha por fratura ou escoamento ocorre quando $(dW/dV)_{\min}$ ou $(dW/dV)_{\max}$ atingem seus respectivos valores críticos.
- Hipótese III: Os incrementos da propagação da trinca $r_1, r_2, \dots, r_{\text{crítico}}$, durante a propagação estável, satisfazem a equação:

$$\left(\frac{dW}{dV}\right)_{\text{crítico}} = \frac{S_1}{r_1} = \frac{S_2}{r_2} = \dots = \frac{S_{\text{crítico}}}{r_{\text{crítico}}}. \quad (149)$$

A fratura instável ou escoamento acontecem quando o tamanho crítico $r_{\text{crítico}}$ é atingido (Gdoutos, 2005). Nesse caso, $S_{\text{crítico}}$ corresponde a uma propriedade do material que depende das condições de carregamento, condições de teste, etc., denominada Tenacidade a Fratura (Sato, 2009).

Utilizando coordenadas polares e trabalhando com o campo de tensões em duas dimensões, a Hipótese I pode ser expressa matematicamente como:

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0, \quad (150)$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} > 0. \quad (151)$$

Usando a Eq. (141) nas duas expressões enunciadas anteriormente (Equações 146 e 147), tem-se:

$$[2\cos\theta - (\kappa - 1)]\text{sen}\theta K_I^2 + 2K_I K_{II} [2\cos(2\theta) - (\kappa - 1)\cos\theta] + K_{II}^2 [(\kappa - 1 - 6\cos\theta)\text{sen}\theta] = 0, \quad (152)$$

$$K_I^2 [2\cos(2\theta) - (\kappa - 1)\cos\theta] + 2K_I K_{II} [(\kappa - 1)\text{sen}\theta - 4\text{sen}(2\theta)] + K_{II}^2 [(\kappa - 1)\cos\theta - 6\cos\theta] > 0. \quad (153)$$

A direção de propagação da trinca, por conseguinte, será determinada através da Eq. (152) solucionando para θ , obedecendo a condição descrita pela Eq. (153). As expressões anteriores utilizam o Critério da Mínima Densidade de Energia de Deformação para uma trinca em um campo de tensões bidimensional sob condições de carregamento em modo misto.

Dentro do código do MEC, foi utilizado o método da Bissecção para determinar a raiz da Eq. (152) - tal método serve para encontrar raízes de equações não lineares em intervalos determinados. Uma vez encontrada a raiz, a condição descrita pela Eq. (153) é usada para verificar se o ângulo é realmente o procurado.

Usando agora a Hipótese III, pode-se escrever uma estimativa para o próximo incremento de propagação através da relação entre os fatores S dos incrementos atual e anterior (Sato, 2009):

$$\Delta a_{i+1} = \frac{S_{i+1}}{S_i} \Delta a_i, \quad (154)$$

onde, Δa é o incremento e $i + 1$ representa o incremento subsequente. Assim, o algoritmo segue em um processo iterativo até que o valor de S se torne crítico.

Tanto o Critério da Máxima Tensão Circunferencial como o Critério da Mínima Densidade de Energia de Deformação foram utilizados para determinar o ângulo de propagação junto ao programa de MEC, entretanto, é importante observar que o MDED possui a vantagem de possibilitar a avaliação do tamanho do incremento do próximo avanço à partir de informações do avanço atual, o que permite a utilização de uma quantidade menor de incrementos até o comprimento final da trinca.

5 PROPAGAÇÃO DE TRINCAS POR FADIGA COMPUTACIONAL

5.1 Introdução

A primeira parte deste trabalho teve por objetivo calcular o fator de intensidade de tensões em modo de abertura, usando o Método dos Elementos de Contorno aplicado à elasticidade em dois movimentos distintos. Primeiramente, foi utilizada a técnica de extrapolação de deslocamentos junto ao código supracitado, fazendo uso de elementos quadráticos padrão, elementos de ponto a um quarto e elementos de ponto a um quarto com singularidade de tração para compor as funções de forma. Em seguida, foi utilizado o Método dos Elementos de Contorno Dual junto à técnica da Integral J para calcular K_I não só para uma placa contendo uma trinca central, como também para a situação em que a trinca se encontra fora de simetria.

O estudo de fadiga teve a pretensão de gerar o conhecimento necessário para a análise da propagação da trinca propriamente dita, que, como visto, tem no fator de intensidade de tensões um parâmetro fundamental para compor os modelos matemáticos que descrevem o fenômeno. No Capítulo 3, analisamos apenas trincas carregadas em modo de abertura, tendo que considerar apenas K_I . Nas páginas que se seguem, novos exemplos contemplando carregamento misto serão formulados cujos resultados serão apresentados e comparados com dados experimentais disponíveis na literatura.

O algoritmo de propagação desenvolvido por Sato (2009) utiliza o método Dual dos Elementos de Contorno para obter as tensões e deslocamentos nos pontos do contorno e nos pontos internos, utilizando para isso os mesmos programas descritos anteriormente no tópico 3.4.1 deste texto. Essas informações alimentarão, como dados de entrada, o algoritmo de propagação, que deverá calcular o ângulo de propagação usando um dos métodos descritos em 4.6 (MTC ou MDED) e o número de ciclos até a ocorrência da falha, usando a Lei de Paris e o Modelo de Fechamento de Trinca Induzido por Plasticidade. Comentários mais aprofundados a respeito do funcionamento do programa encontram-se a seguir.

5.2 Comentários sobre o Algoritmo Utilizado

O programa para a modelagem da propagação de trincas (Sato, 2009) segue várias etapas em sequência, que serão especificadas e explicadas a seguir. Como já mencionado, o primeiro passo será desempenhado pelo programa que utiliza o Método Dual dos Elementos de Contorno - já utilizado para calcular o fator de intensidade de tensões em modo I em 3.5.4, junto a técnica da Integral J - intitulado *dual.m*, implementado pelo Professor Dr. Éder Lima de Albuquerque. Desta forma, a explicação acerca do funcionamento do programa seguirá a partir dos dados de saída desse código, de acordo com a lista contida em 5.2.1.

5.2.1 Sobre o Código Principal do Algoritmo de Propagação

O algoritmo de propagação utiliza o arquivo de entrada de dados (5.2.2) como os parâmetros de entrada para a análise pelo MECD, que produzirá resultados que serão trabalhados e culminarão na simulação da propagação da trinca propriamente. As funções descritas abaixo estão em ordem de execução.

- 1) *dual.m*: Análise das tensões e deslocamentos nos pontos internos e no contorno usando as funções descritas em 3.5.4 para cada incremento, usando a formulação do MECD.
- 2) *find_tips.m*: Procedimento para identificar o número de pontas de trincas presentes na geometria. A função fornece não só o número de pontas, bem como os números dos respectivos nós físicos relacionados a essas pontas. O código trabalha armazenando os nós e elementos físicos e geométricos presentes em toda a trinca em matrizes e vetores auxiliares, identificando os extremos da trinca e armazenando o número de pontas em um vetor temporário. Finalmente, o algoritmo encontra os nós físicos e os pontos da geometria aos quais as pontas da trinca pertencem.
- 3) *integralJ_MS.m*: Após identificadas as pontas, a técnica da Integral J é usada em cada ponta de trinca a fim de obter os fatores de intensidade de tensão em modo I e II . A função usada na primeira parte desse trabalho foi revisada (Sato, 2009) de forma a evitar muitos dos problemas encontrados no cálculo dessa integral, além de possibilitar trabalhar com carregamentos multiaxiais. Essa nova versão permite modelar trincas inclinadas; apresenta uma correção acerca do número de pontos para calcular a Integral J , que prevê uma distância mínima entre o ponto interno e o contorno como sendo igual a metade do comprimento do elemento de contorno mais próximo a esse ponto; implementa o desacoplamento de modos e identifica os sinais de K_I e K_{II} . Para aplicar a técnica da Integral J devem ser utilizados os valores para tensões em pontos internos pertencentes ao contorno onde é calculada a integral, assim, utiliza-se os resultados obtidos pelo algoritmo de MECD, avaliados no sistema de coordenadas local da ponta da trinca, como já explicado em 3.3.2 e 3.4.5 (Sato, 2009).

- 4) *max_tens_circ.m* ou *strain_energy_density.m*: Os fatores de intensidade de tensão K_I e K_{II} alimentam a etapa seguinte, cuja análise segue com uma avaliação acerca do ângulo de propagação da trinca, usando o MTC (*max_tens_circ.m*, explicado em 4.6.1) ou o MDED (*strain_energy_density.m*, explicado em 4.6.2). O usuário deve escolher previamente qual critério o programa deverá utilizar. É interessante lembrar que o critério da Mínima Densidade de Energia de Deformação é capaz de avaliar o tamanho do próximo incremento utilizando dados do incremento atual. Como dados de saída, ambas as funções devem fornecer o ângulo de propagação e o fator de intensidade de tensões equivalente, sendo que a função que utiliza o MDED fornece ainda o Fator Densidade de Energia de Deformação S . O incremento seguinte pode ser calculado através da Eq. (154), que relaciona o incremento atual e os fatores S atual e anterior.
- 5) *fatigue_life_closure.m*: Essa função utiliza a Lei de Paris para avaliar o número de ciclos gastos para que ocorra a propagação. O procedimento é realizado para todas as pontas de trincas, sendo o cálculo feito através da integração da Lei de Paris pela regra do trapézio para cada incremento, na qual todas as contribuições são somadas para resultar na área total sob a curva $da/dN \times \Delta K$. É possível escolher diferentes valores para U , de acordo com as Equações (112) e (113) de Elber e Schijve, respectivamente.

Finalmente, após a execução de todas as etapas anteriormente descritas para todas as pontas de trincas identificadas, realiza-se a inserção dos novos incrementos, de acordo com o tamanho e o ângulo de propagação já calculados.

5.2.2 Sobre a Entrada de Dados

O arquivo de entrada de dados, se comparado aos programas utilizados na primeira parte desse trabalho, sofreu modificações a fim de incluir informações necessárias à realização da propagação. Além das propriedades elásticas do material, como módulo de elasticidade E e razão de Poisson ν , e do tipo de problema a ser considerado (estado plano de tensão ou deformação), a razão de carga R e as constantes da lei de Paris, C e m , bem como o comprimento do incremento inicial e o número de incrementos a serem simulados também devem ser especificados nesse arquivo. O arquivo de entrada de dados para esse algoritmo está disponível em anexo.

Os dados que descrevem as condições do problema a ser analisado são dispostos em matrizes, cujas descrições estão disponíveis a seguir.

- 1) [PONTO]: matriz que contém os pontos que definem a geometria. Geralmente são definidos em função dos parâmetros geométricos do problema, tais quais os comprimentos da trinca e da placa, a largura da placa, entre outros. Deve incluir tanto os pontos que caracteriza os limites da placa, como as dimensões da trinca em si.
- 2) [LINHA]: matriz que contém as linhas que definem a geometria a partir dos pontos descritos na etapa anterior. A primeira linha da matriz define o número da linha, em seguida define-se o ponto inicial e final, o tipo de elemento usado (contínuo ou descontínuo) e o tipo de equação a ser utilizada (deslocamento ou forças de superfícies).
- 3) [DISCRE]: matriz para a definição da malha, na qual deve ser informado o número de elementos usado em cada linha.
- 4) [DESLOC]: aqui devem ser informadas as linhas que sofrerão as aplicações da condição de contorno de restrição de deslocamento.
- 5) [TRAC]: informa-se as linhas que devem sofrer a aplicação da condição de contorno de forças de superfície.

5.2.3 Sobre o Pós-processamento e os Resultados Fornecidos

O algoritmo deve fornecer a informação sobre os ângulos de cada propagação, os fatores de intensidade de tensão em modo *I* e *II* e os números de ciclos e incrementos. Além desses dados, o programa exibe alguns gráficos mostrando a geometria e as condições de contorno descritas pelo usuário no arquivo de entrada de dados, bem como uma retificação para cada incremento, provendo uma nova figura por propagação.

O pós-processamento dos resultados constrói alguns outros gráficos com a função *mostra_resultados.m*. Uma figura mostrando a geometria com perfil de propagação interpolado é exibida através da função *mostra_geo_interp.m*; são fornecidas a curva da vida em fadiga, que mostra o aumento do comprimento da trinca pelo número de ciclos gastos na propagação, bem como a curva da taxa de propagação $da/dN \times \Delta K$ para as trincas analisadas, de acordo com a variação do fator de intensidade de tensões efetivo segundo o critério da Eq. (119).

A Fig. 32 mostra um fluxograma que resume as etapas definidas anteriormente.

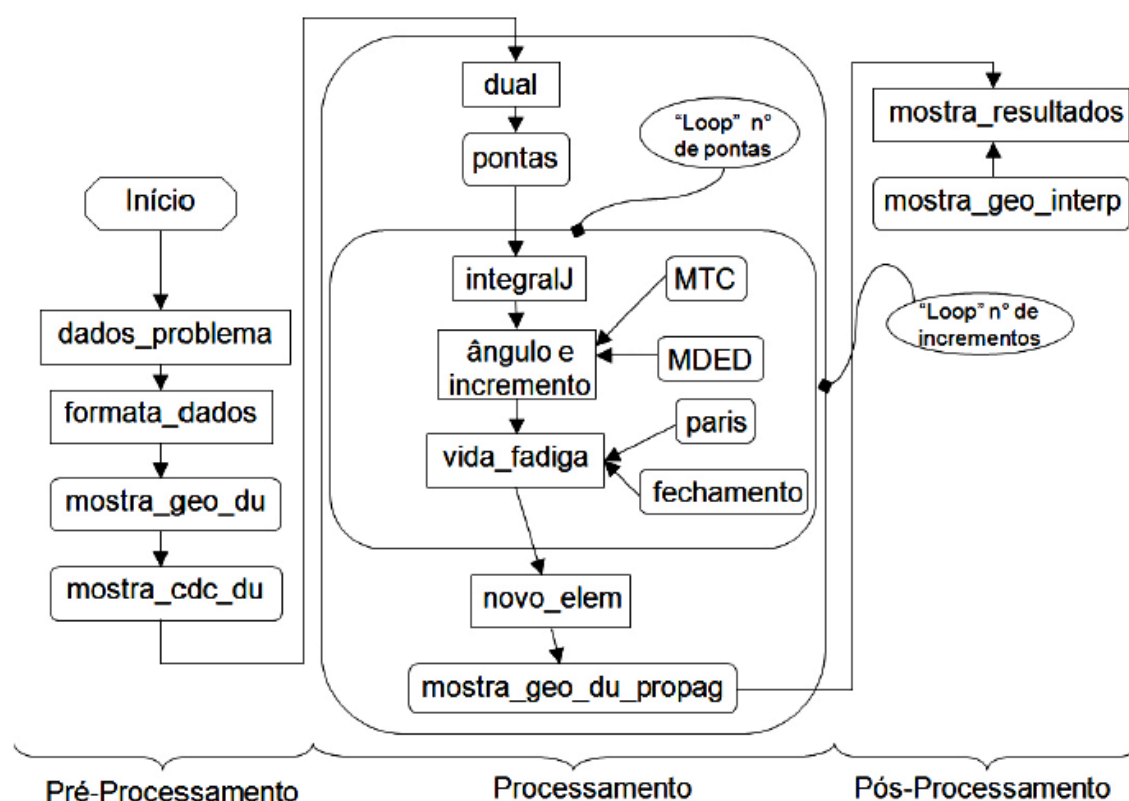


Figura 32. Fluxograma para o algoritmo de propagação (Sato, 2009)

5.3 Resultados Numéricos

Serão apresentados nesta etapa resultados numéricos obtidos por intermédio do algoritmo de propagação para dois problemas distintos - a serem definidos na sequência. Esses resultados serão comparados com os dados experimentais obtidos por Marcel Sato (2009) na sua dissertação de mestrado, cujo trabalho serviu de guia para este estudo.

Inicialmente serão formulados os novos problemas a serem analisados, em seguida serão apresentados todos os resultados correspondentes à simulação numérica, sendo comparados, na sequência, com dados experimentais disponíveis, a fim de salientar a confiabilidade do código apresentado nas páginas anteriores.

5.3.1 Chapa com Trinca Inclinada a 45°

A geometria apresentada na Fig. (33) a seguir representa um modelo simplificado do problema real, entretanto, tal caracterização se define como suficiente e necessária para a análise numérica realizada. Do mesmo modo que nos exemplos apresentados em 3.5, a condição de contorno superior, como ilustrada, representa uma condição de deslocamento nulo; já os nós do contorno inferior estão sendo tracionados com uma tensão de 92,63 MPa, como é possível conferir na entrada de dados para este exemplo, disponível no Anexo IV. O problema foi considerado em estado plano de tensão, uma vez que a chapa é muito fina (Sato, 2009).

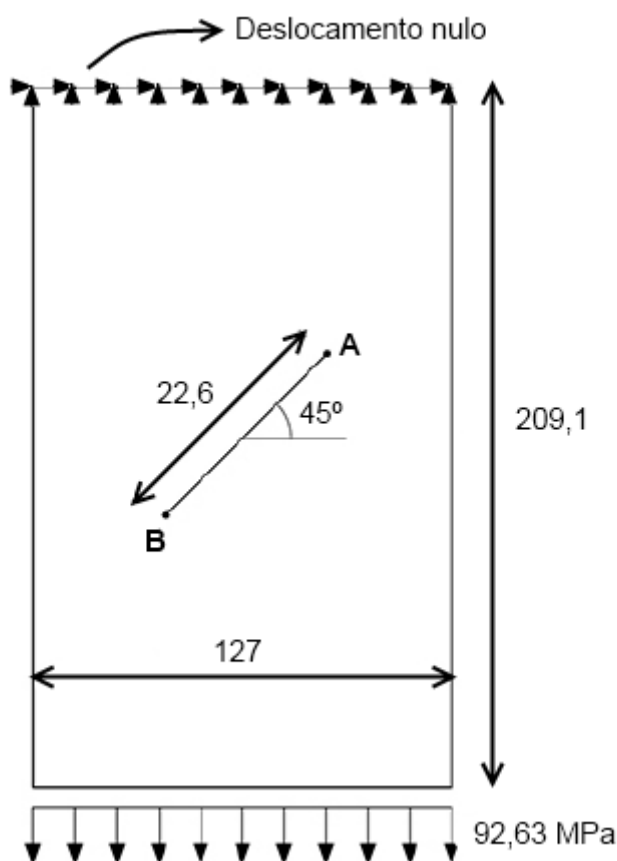


Figura 33. Geometria da chapa trincada (todas as dimensões em mm)

A simulação numérica terá seus resultados comparados com dados experimentais, obtidos por Marcel Sato (2009) em sua dissertação de mestrado, relativos ao ensaio de uma placa de alumínio Al 2024-T3 nas mesmas condições descritas nos respectivos modelos teóricos. As propriedades desse material, que deverão ser usados no arquivos de entrada de dados do programa de propagação, estão disponíveis abaixo:

- Módulo de Elasticidade (E) = 73,1 GPa;
- Razão de Poisson (ν) = 0,33.

A razão de carga R para a simulação foi expressa como sendo igual a 0,0833 - decorrente da variação da tensão máxima e mínima dos corpos de prova cujos dados experimentais servem de comparação a esse modelo numérico, 92,63 MPa e 7,72 MPa, para a tensão máxima e mínima, respectivamente; as constantes da Lei de Paris, C e m , foram fixadas em $1,42 \cdot 10^{-8}$ e 3,59, respectivamente (Sato, 2009). O critério utilizado para a determinação do ângulo de propagação da trinca foi o da Mínima Densidade de Energia de Deformação, o que nos permitiu calcular os incrementos seguintes através do parâmetro S na Eq. (154).

Para esta simulação, definimos o incremento inicial como tendo o comprimento de 1 mm e uma propagação total de 9 incrementos.

A Fig. (34) a seguir apresenta a geometria inicial e as condições de contorno definidas pelo programa, de acordo com os parâmetros descritos anteriormente, já considerando o incremento inicial de 1 mm nas pontas superior e inferior, A e B, respectivamente.

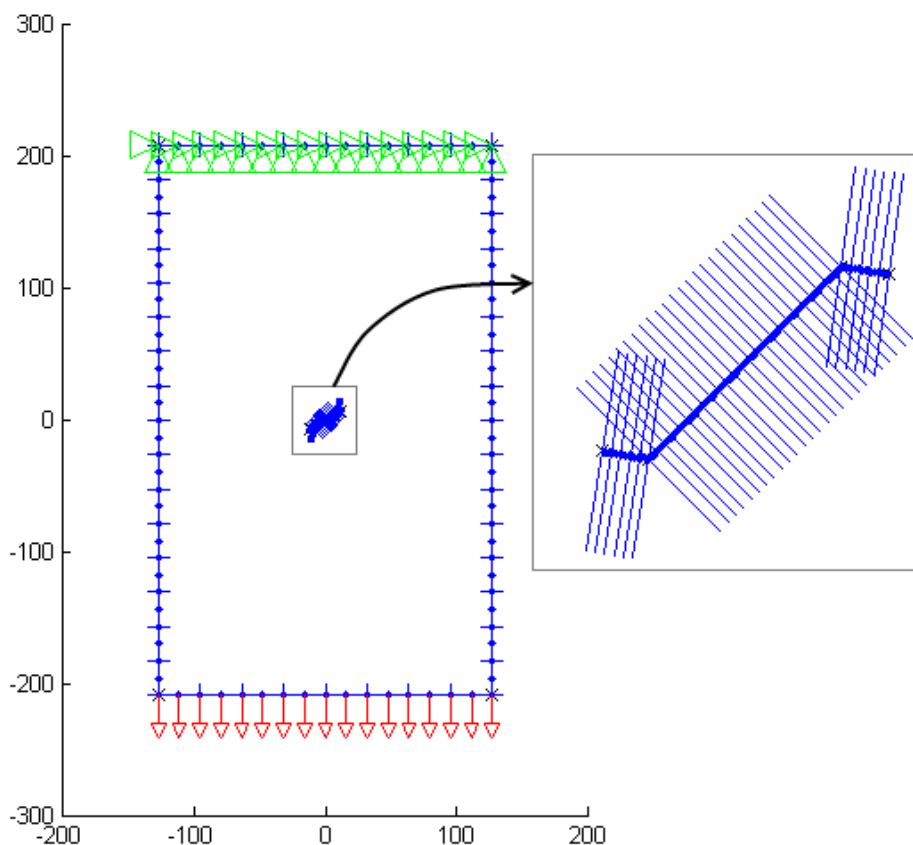


Figura 34. Geometria e condições de contorno do problema gerados pelo programa

As linhas perpendiculares ao entalhe dispostas em toda a extensão da trinca ilustram os elementos usados na análise numérica. Para este caso, foram utilizados 48 elementos quadráticos contínuos para modelar os contornos da geometria e 70 elementos quadráticos descontínuos para

modelar a trinca, sendo que 4 elementos quadráticos descontínuos foram empregados na inserção de novos incrementos, como é possível perceber em análise a Fig. 34.

As Tabelas 5, 6, 7, 8 e 9 mostram todos os parâmetros calculados pelo algoritmo, dispondo os valores correspondentes ao tamanho dos incrementos, K_I , K_{II} , K_{eq} e o ângulo de propagação para cada uma das pontas *A* e *B* da trinca.

Os valores das tabelas a seguir podem ser obtidos por intermédio da função *increm_log.m*, que armazena os valores do comprimento dos incrementos durante a propagação.

Tabela 5. Tamanho dos incrementos para as pontas *A* e *B* da trinca durante a propagação

Número do Incremento	Ponta A (mm)	Ponta B (mm)
1	1,0000	1,0000
2	1,2632	1,2478
3	1,5107	1,5054
4	1,7701	1,7616
5	2,0510	2,0417
6	2,3624	2,3550
7	2,7228	2,7089
8	3,1363	3,1242
9	3,6277	3,6093

Tabela 6. Valores de K_I e K_{II} para a ponta *A* da trinca durante a propagação

Número do Incremento	$K_I (MPa\sqrt{m})$	$K_{II} (MPa\sqrt{m})$
1	19,0633	-0,7662
2	19,7049	-0,4312
3	20,5065	-0,3290
4	21,4808	-0,1614
5	22,5864	-0,1554
6	23,8139	-0,4719
7	25,2234	0,1460
8	26,7744	-0,3756
9	28,5413	0,1315

Tabela 7. Valores de K_I e K_{II} para a ponta *B* da trinca durante a propagação

Número do Incremento	$K_I (MPa\sqrt{m})$	$K_{II} (MPa\sqrt{m})$
1	19,1092	0,7323
2	19,5845	-1,3933
3	20,5200	0,2155
4	21,4779	-0,2985
5	22,5881	-0,1440
6	23,8361	0,1536
7	25,2148	-0,4222
8	26,7871	0,1467
9	28,5330	-0,3628

Em análise às Tabelas 6 e 7, percebe-se que K_I cresce a medida que o comprimento da trinca aumenta, estabelecendo uma relação direta com a propagação. Os valores de K_{II} , em contrapartida, exibem um comportamento oscilante à medida que a trinca se propaga. Tal característica se mantém no exemplo seguinte (5.3.2), e demonstra a natureza dos fatores de intensidade de tensão em modo I e II durante a propagação, reforçando o que cada um desses parâmetros representam para o comportamento físico do sólido. É interessante observar que a magnitude de K_{II} tende praticamente para zero logo na propagação do primeiro incremento, ou seja, o fator de intensidade de tensão referente ao modo de abertura, K_I , possui uma influência muito mais significativa após a inserção do primeiro incremento, e durante toda a propagação da trinca.

Tabela 8. Valores de K_{eq} para as pontas A e B da trinca durante a propagação

Número do Incremento	Ponta A	Ponta B
1	19,0787	19,1233
2	19,7096	19,6344
3	20,5091	20,5212
4	21,4814	21,4800
5	22,5869	22,5885
6	23,8186	23,8366
7	25,2238	25,2183
8	26,7770	26,7875
9	28,5416	28,5353

Tabela 9. Valores para os ângulos de propagação θ em graus

Número do Incremento	Ponta A	Ponta B
1	4,5732	355,6370
2	357,4991	7,9396
3	1,8357	358,7977
4	0,8609	1,5905
5	359,2120	0,7303
6	2,2622	359,2619
7	359,3370	1,9130
8	1,6039	359,3728
9	359,4721	1,4541

O ângulo de propagação θ é definido de acordo com o sistema de coordenadas na ponta do incremento de trinca, de acordo com a Fig. 16. Equivale ao ângulo que a direção da propagação da trinca faz com a horizontal, direção x_1 dessa mesma figura.

A Fig. (35) abaixo mostra o perfil interpolado após a propagação com a trinca em detalhe. A parte em vermelho na figura representa os incrementos de 2 a 9 para as duas pontas da trinca.

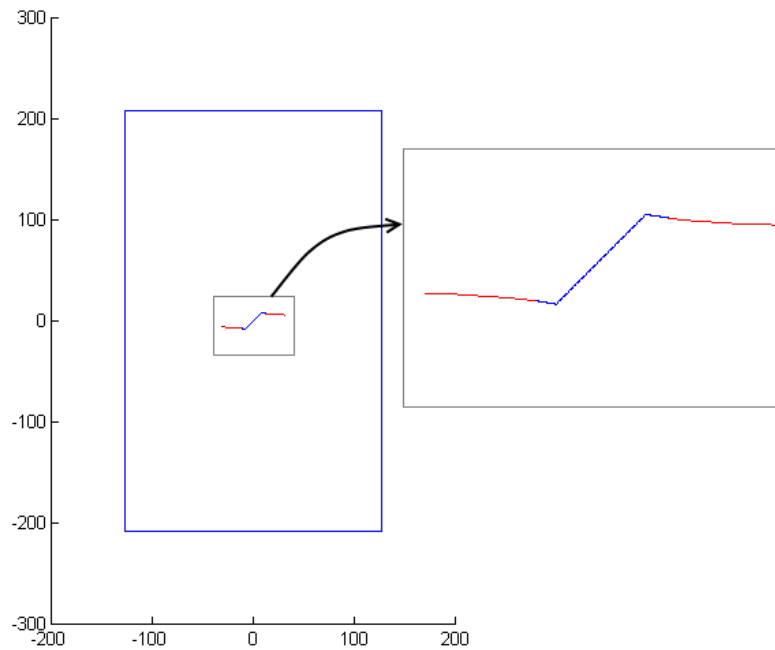


Figura 35. Perfil interpolado para a trinca após a propagação

Os gráficos de vida em fadiga para as pontas *A* e *B* da trinca serão apresentados no intuito de comparar os resultados numéricos com os dados experimentais conhecidos (Sato, 2009).

Para a simulação numérica, o número de ciclos gastos por incremento percorrido durante a propagação é calculado através da Lei de Paris, como já fora explicado. Entretanto, as formulações de fechamento de trinca induzido por plasticidade contendo as abordagens de Elber (1970) e Schijve (1981) também podem ser usadas para aproximar os resultados numéricos dos dados de laboratório. O gráfico abaixo compara as três abordagens e a curva de vida em fadiga obtida *in loco* para o ponta *A* da trinca (Sato, 2009).

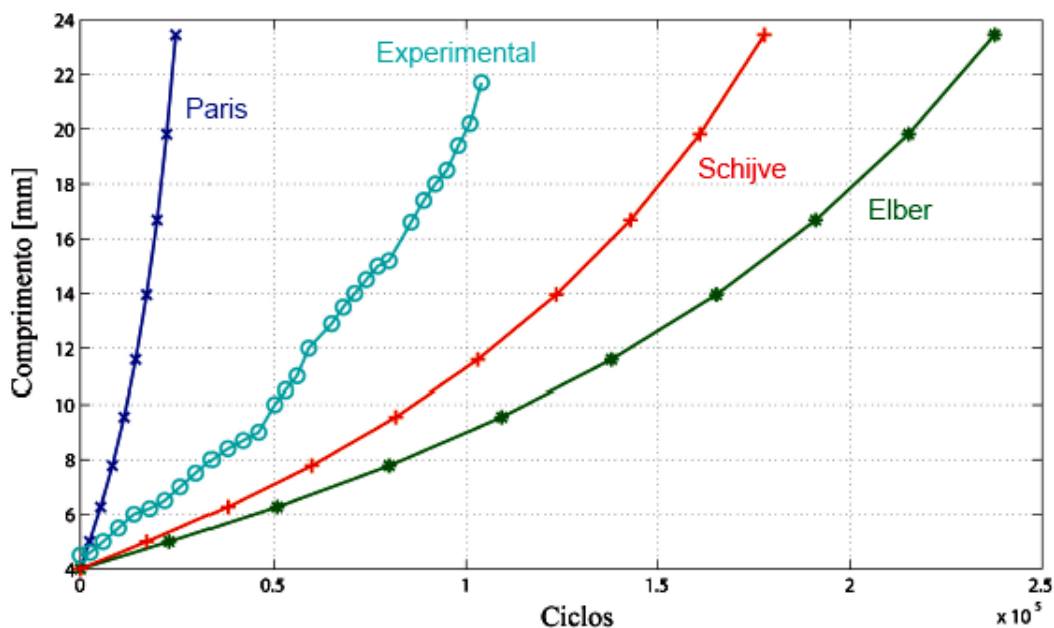


Figura 36. Comparação dos resultados para vida em fadiga usando diferentes abordagens (Sato, 2009)

Em análise a Fig. 36, é interessante notar que a Lei de Paris é o método mais conservador de todos, prevendo uma vida mais curta que as demais metodologias. As abordagens de Elber e Schijve, entretanto, já preveem um retardo excessivo na propagação devido o mecanismo de fechamento de trinca, de modo que nenhum dos métodos teóricos apresentados aproximam de maneira satisfatória o comportamento real da trinca. O modelo de Elber trabalha com $U = 0,5333$, ou seja, considera apenas 53,55% de ΔK atuando efetivamente, enquanto que Schijve define $U = 0,5783$.

No algoritmo de propagação, a fim de aproximar ao máximo a curva numérica do comportamento experimental do problema, foi utilizado $U = 0,69$ - valor arbitrado por Sato (2007), tendo em vista a maximização do ajuste entre os dados experimentais e os resultados numéricos obtidos por ele -, que considera 69% de ΔK atuando efetivamente. As Figuras 37 e 38 apresentam os gráficos da vida em fadiga para as pontas A e B, comparando a curva obtida pela análise numérica e os dados experimentais conhecidos.

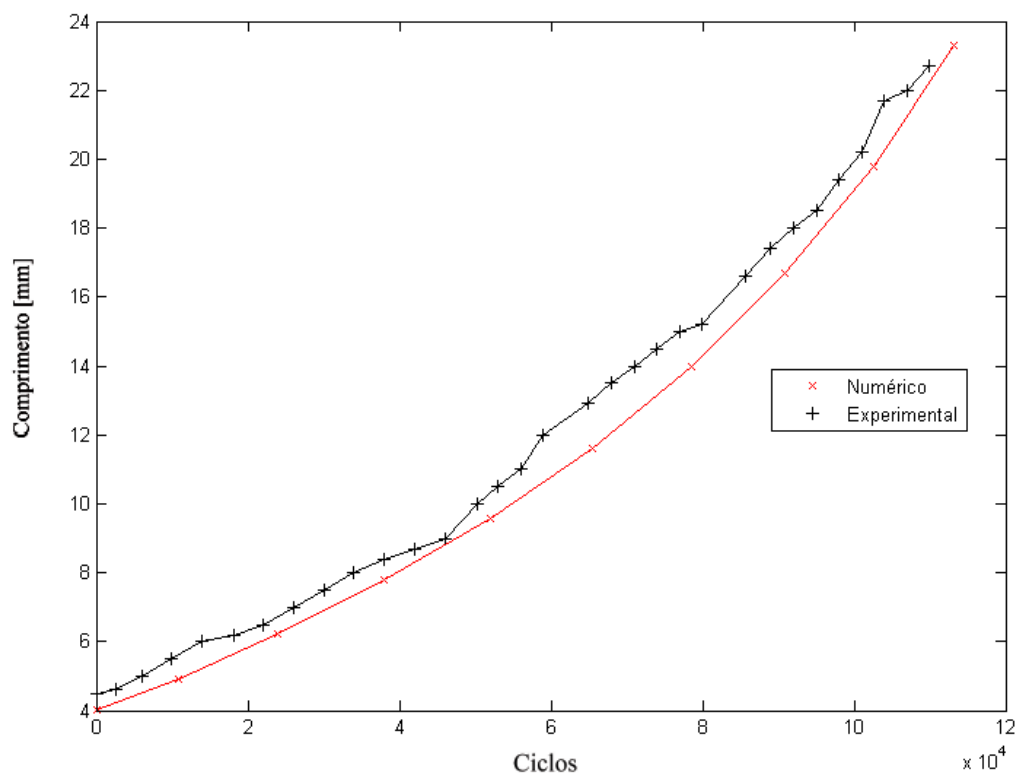


Figura 37. Comparação entre o resultado numérico e experimental da vida em fadiga para a ponta A com trinca inclinada a 45°

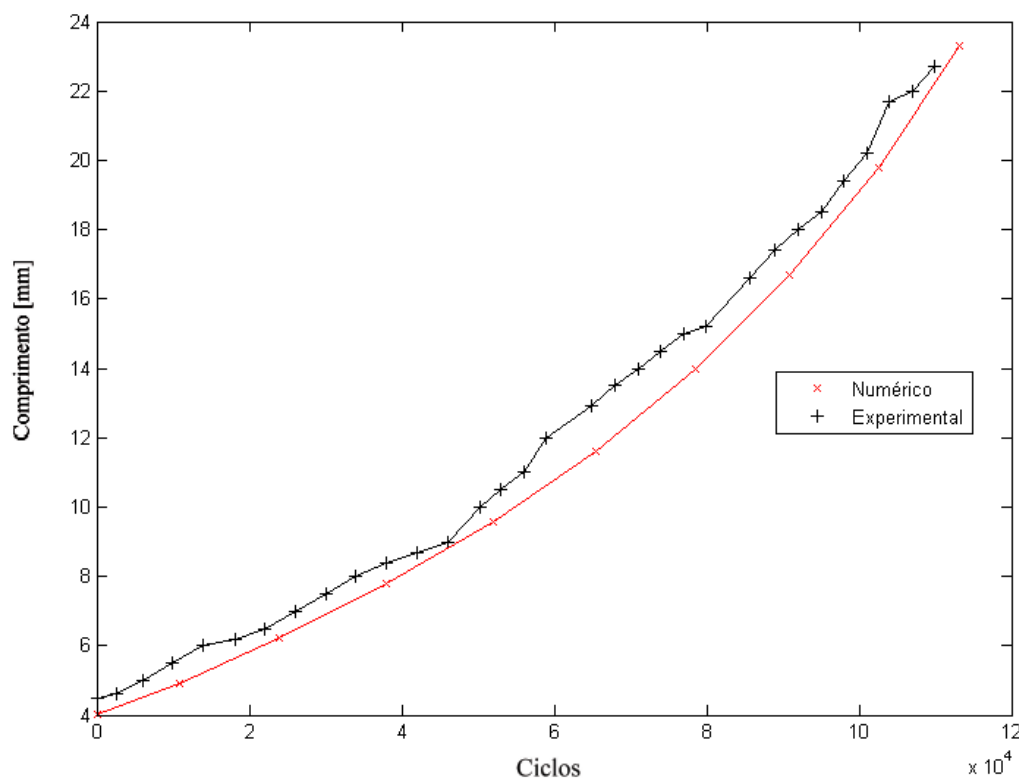


Figura 38. Comparação entre o resultado numérico e experimental da vida em fadiga para a ponta B com trinca inclinada a 45°

Uma comparação com a geometria interpolada pelo código numérico e o experimento realizado com uma placa com as mesmas propriedades mecânicas que o exemplo simulado pode ser visto na Fig. (39) a seguir. Analisando a figura, é possível concluir que o Critério da Mínima Densidade de Energia de Deformação - que fornece as informações acerca do ângulo de propagação θ , bem como permite calcular o comprimento dos incrementos durante a propagação - produz resultados compatíveis com os dados experimentais.

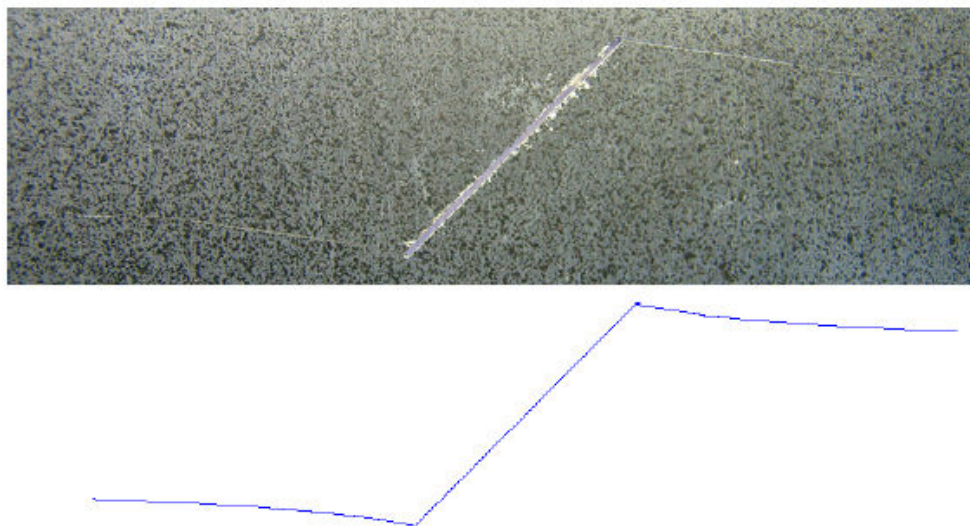


Figura 39. Comparação entre a geometria propagada obtida pela simulação e a geometria propagada do primeiro corpo de prova testado com esta configuração (Sato, 2009)

5.3.2 Chapa com Duas Trincas Horizontais

O segundo exemplo simulado contempla uma placa plana nas mesmas condições do problema anterior, porém, com duas trincas carregadas em modo *I*. O algoritmo trabalhará, portanto, considerando quatro pontas de trincas, denominadas A, B, C e D, como ilustrado na Fig. (39) abaixo.

Todos os parâmetros adotados em 5.3.1 foram utilizados nessa simulação, de modo que o problema ainda é considerado como em estado de tensão plana, possuindo os mesmos valores para as constantes da Lei de Paris e razão de carga *R*. O critério da Mínima Densidade de Energia de Deformação também foi usado nesta etapa. As propriedades geométricas estão definidas a seguir.

Para o problema em questão, foram adotados 48 elementos quadráticos contínuos para modelar os contornos da geometria e 100 elementos quadráticos descontínuos para as trincas, sendo usados quatro elementos quadráticos descontínuos para modelar os novos incrementos durante a propagação. O incremento inicial possui comprimento de 1 mm, sendo utilizados 7 incrementos no total.

A Fig. 40 a seguir apresenta a geometria com perfil de propagação interpolado após a inserção de 7 incrementos cujos comprimentos estão dispostos da Tab. 10. As Tabelas 11, 12, 13, 14, 15 e 16 apresentam os valores calculados para K_I , K_{II} , K_{eq} e o ângulo de propagação para todas as pontas de trinca.

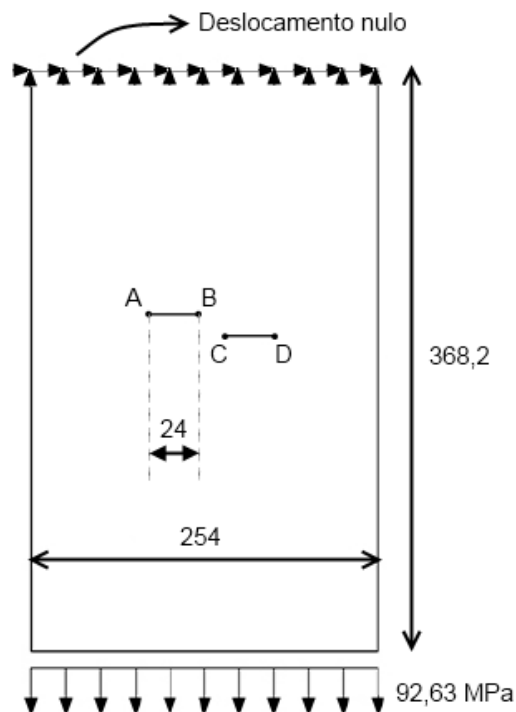


Figura 40. Características geométricas do problema de duas trincas horizontais (todas as dimensões em mm)

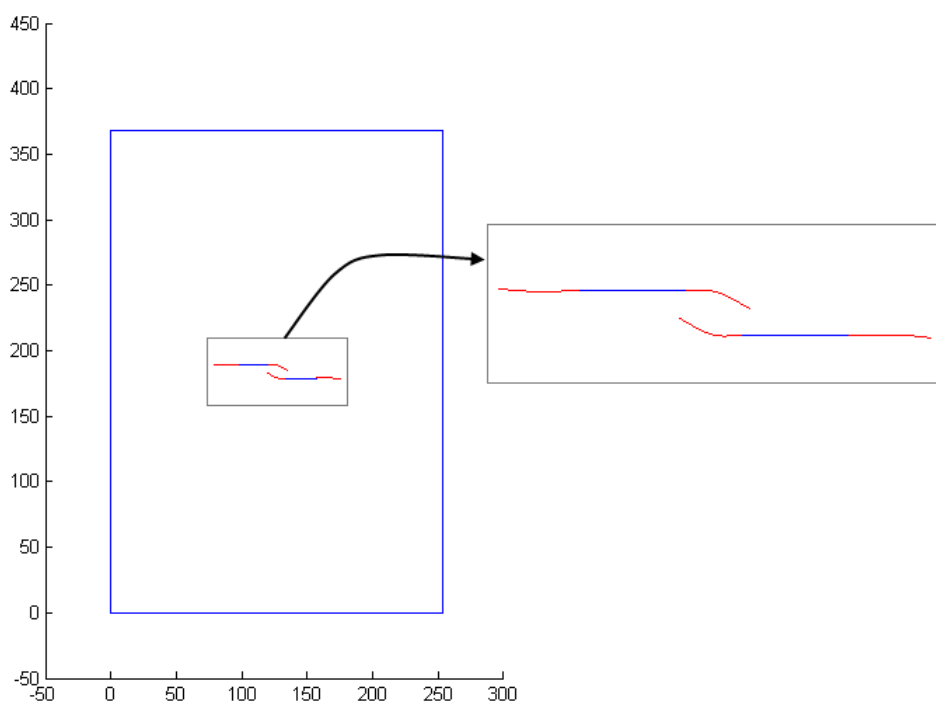


Figura 41. Geometria com perfil interpolado após propagação

Tabela 10. Tamanho dos incrementos para as pontas *A*, *B*, *C* e *D* das trincas durante a propagação

Incremento	Ponta A	Ponta B	Ponta C	Ponta D
1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	1,3051	1,3580	1,3589	1,3062
3	1,6525	1,8371	1,8397	1,6548
4	2,1251	2,5475	2,5497	2,1291
5	2,8648	3,4031	3,4103	2,8713
6	3,9551	2,8319	2,8385	3,9670
7	5,0085	1,7491	1,7532	5,0270

Tabela 11. Valores de K_I e K_{II} para a ponta *A* da trinca durante a propagação

Incremento	K_I (MPa\sqrt{m})	K_{II} (MPa\sqrt{m})
1	19,6080	-0,2567
2	20,5914	0,0851
3	22,0464	-0,1481
4	24,1920	0,1200
5	27,4367	0,2055
6	31,6612	0,9898
7	35,1591	0,4680

Tabela 12. Valores de K_I e K_{II} para a ponta *B* da trinca durante a propagação

Incremento	K_I (MPa\sqrt{m})	K_{II} (MPa\sqrt{m})
1	20,9715	-0,4976
2	22,4600	0,6388
3	24,8661	-0,2661
4	28,2124	2,6182
5	31,6907	4,3262
6	28,3387	4,3254
7	21,2434	-6,4214

Tabela 13. Valores de K_I e K_{II} para a ponta *C* da trinca durante a propagação

Incremento	K_I (MPa\sqrt{m})	K_{II} (MPa\sqrt{m})
1	20,9475	-0,5514
2	22,4424	0,6659
3	24,8558	-0,3304
4	28,1834	2,7302
5	31,6845	4,3629
6	28,3391	4,3375
7	21,2498	-6,4074

Tabela 14. Valores de K_I e K_{II} para a ponta D da trinca durante a propagação

Incremento	$K_I (MPa\sqrt{m})$	$K_{II} (MPa\sqrt{m})$
1	19,5841	-0,3708
2	20,5765	0,1160
3	22,0376	-0,0556
4	24,1873	0,1030
5	27,4365	0,2591
6	31,6724	1,0146
7	35,1874	0,4950

Tabela 15. Valores de K_{eq} para as pontas A , B , C e D das trincas durante a propagação

Incremento	Ponta A	Ponta B	Ponta C	Ponta D
1	19,6097	20,9774	20,9547	19,5876
2	20,5915	22,4691	22,4523	20,5769
3	22,0469	24,8675	24,8580	22,0376
4	24,1923	28,3349	28,3168	24,1875
5	27,4375	31,9901	31,9892	27,4377
6	31,6766	28,6737	28,6760	31,6887
7	35,1622	22,2285	22,2304	35,1909

Tabela 16. Valores para os ângulos de propagação em graus de todas as pontas de trinca

Incremento	Ponta A	Ponta B	Ponta C	Ponta D
1	1,4990	2,7120	3,0069	2,1664
2	359,5262	356,7550	356,6162	359,3543
3	0,7697	1,2253	1,5216	0,2892
4	359,4318	349,9687	349,5784	359,5123
5	359,1420	346,2271	346,1326	358,9186
6	356,4501	354,1858	345,1550	356,3642
7	358,4774	22,6878	22,6555	358,3912

A vida em fadiga foi obtida utilizando o modelo de fechamento de trinca, entretanto, faz-se importante destacar algumas peculiaridades do problema simulado. Observando a Fig. 40, podemos definir duas situações distintas. A primeira situação ocorre com as pontas A e D , onde verificamos uma propagação quase que completamente horizontal, exceto por uma inclinação provocada pela presença do modo II de deformação; a segunda situação diz respeito ao comportamento das pontas B e C , que já apresentam uma curvatura bem acentuada após um percurso horizontal inicial. Neste caso, os dados experimentais apontam para uma mudança na curvatura do gráfico de vida em fadiga quando a trinca atinge 10 mm de comprimento - aproximadamente 40.000 ciclos (Sato, 2009). Tal fato indica uma alteração no valor de U exatamente no momento em que a curva exibe essa mudança, o que nos leva a definir o valor desse parâmetro em momentos diferentes durante a propagação, de forma a aproximar o comportamento da curva obtida numericamente dos dados experimentais.

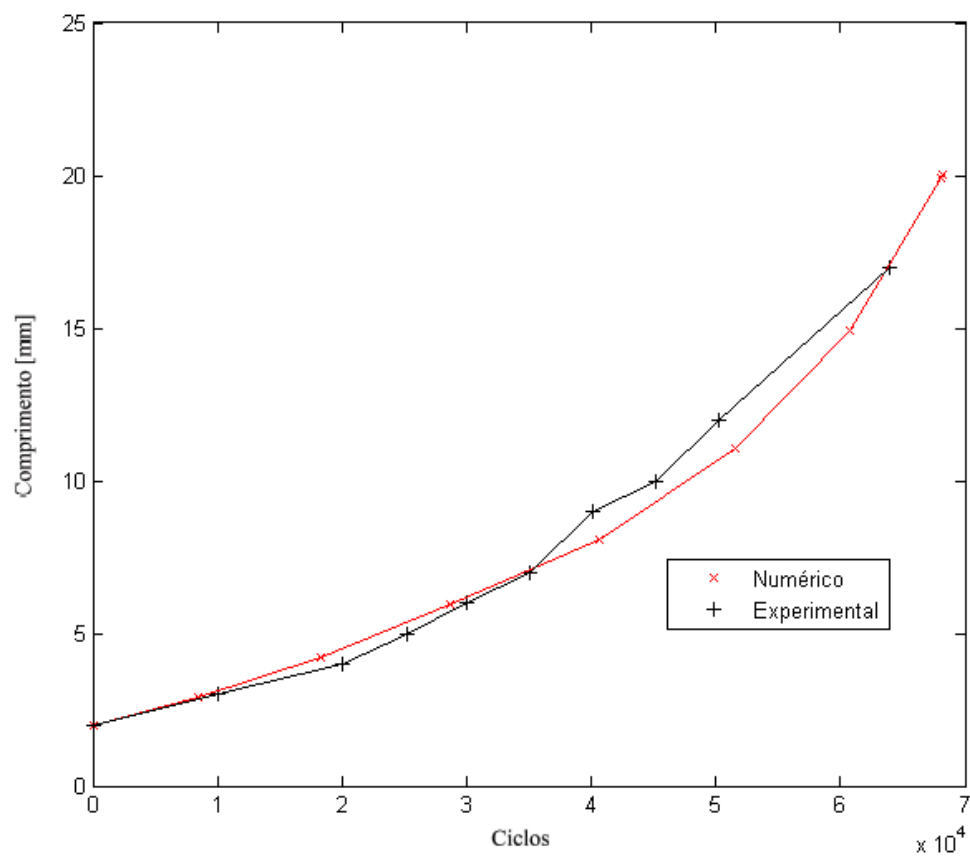


Figura 42. Comparação entre o resultado numérico e experimental da vida em fadiga para as pontas A e D

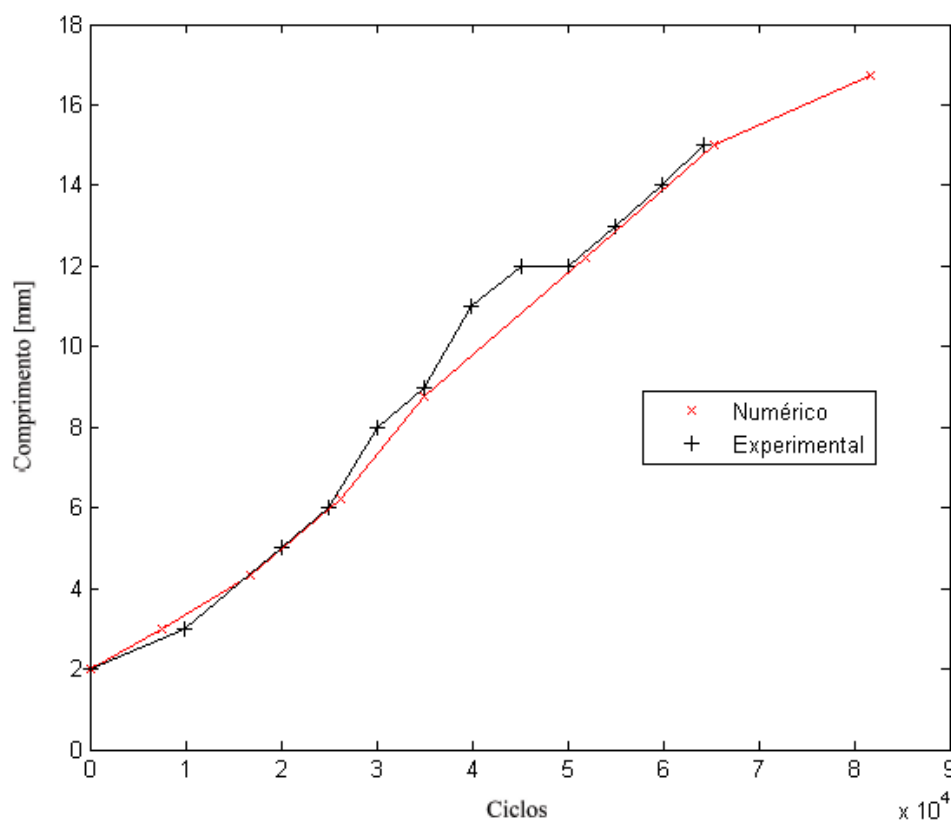


Figura 43. Comparação entre o resultado numérico e experimental da vida em fadiga para as pontas B e C

Para as pontas *B* e *C*, $U = 0,66$ para os quatro primeiros incrementos e $U = 0,52$ para os incrementos restantes. Da mesma forma, para as pontas *A* e *D*, $U = 0,64$ para todos os incrementos da trinca. As Figuras 41 e 42 apresentam a comparação das curvas de vida experimentais e numéricas.

Observando os gráficos anteriores é possível perceber que a simulação provê resultados satisfatórios no que diz respeito a vida em fadiga para todas as pontas das trincas desse exemplo.

Analogamente ao primeiro exemplo, podemos comparar a geometria da trinca após a propagação numérica com a imagem da propagação real feita em laboratório (Sato, 2009). Mais uma vez, percebe-se que o critério MDED produz resultados satisfatórios para o sentido de propagação da trinca e para o tamanho dos incrementos.

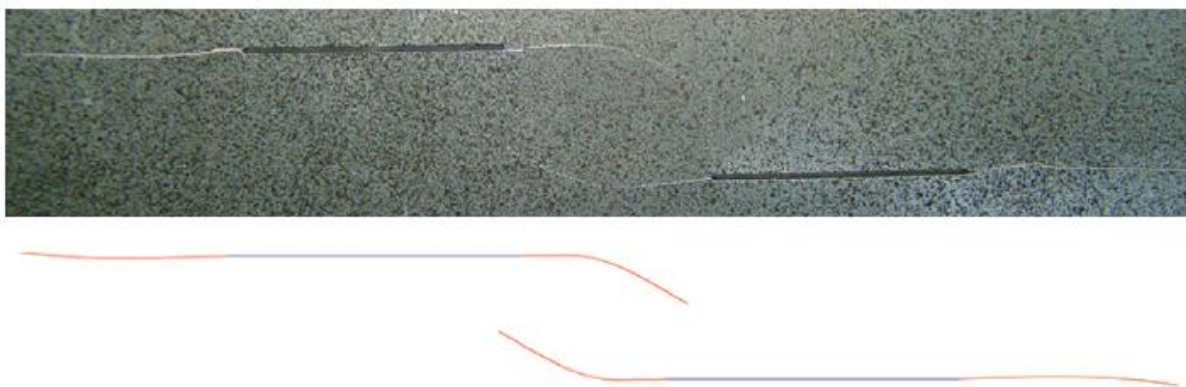


Figura 44. Comparação entre a geometria propagada: (a) geometria propagada do corpo de prova testado para esta configuração e (b) geometria obtida pela simulação com interpolação (Sato, 2009)

6 CONCLUSÕES

Na primeira metade deste trabalho foram apresentados métodos para a determinação do fator de intensidade de tensões para uma trinca central em modo I disposta em uma placa infinita. Para tal, foi usado inicialmente um programa de elastostática com a formulação do MEC para simular a abertura da trinca. Nesta primeira etapa, o resultado obtido para K_I apresentou um erro relativo considerável, o que já era esperado, uma vez que utilizávamos um polinômio de grau dois para interpolar curvas com comportamentos proporcionais à \sqrt{r} e $\sqrt{1/r}$.

Em seguida, utilizamos estratégias a fim de modificarmos as funções de forma para conter as singularidades supracitadas, o que nos levou a um erro relativo final de apenas 0,37% e demonstrou que o modelo numérico era confiável o bastante, com a solução numérica convergindo mais rapidamente para a solução analítica.

Finalmente, calculou-se o fator de intensidade de tensões através da Integral J , simulando não somente trincas centrais, como trincas de borda em placas infinitas, comparando as curvas obtidas numericamente com os dados disponíveis na literatura especializada. Os resultados demonstraram comportamento condizente com o que já era esperado, uma vez que utilizamos o código numérico que possui a convergência mais rápida se comparado aos programas anteriormente utilizados.

A segunda parte deste trabalho teve por finalidade o estudo de Fadiga dos materiais – aprofundando-se sobre o método para a determinação da direção de propagação da trinca e a vida em fadiga, com o estudo de exemplos numéricos específicos. O Método dos Elementos de Contorno Dual se mostrou como uma ferramenta versátil e poderosa na análise de propagação de trincas, produzindo resultados precisos se comparados com dados experimentais disponíveis em Sato (2009).

A função responsável por calcular o fator de intensidade de tensão pela técnica da Integral J possibilitou trabalhar com o modo misto de carregamento, indicando, pelos resultados subsequentes, boa precisão ao fazer uso do desacoplamento dos modos à partir da decomposição do campo elástico em suas componentes simétricas e antissimétricas.

O algoritmo permitiu usar dois critérios distintos para calcular o ângulo de propagação θ : o critério da Máxima Tensão Circuferencial (MTC) e o critério da Mínima Densidade de Energia de Deformação (MDED). Muito embora ambos os critérios produzam resultados precisos, o MDED foi utilizado para calcular θ e o comprimento dos incrementos durante a propagação, em ambos os problemas, justamente por essa técnica possibilitar a avaliação do tamanho do próximo incremento

através de informações do incremento atual, utilizando para isso o parâmetro Densidade de Energia de Deformação S .

A avaliação da vida em fadiga foi realizada utilizando a forma integral da Lei de Paris, levando em consideração o fenômeno de fechamento de trinca induzido por plasticidade, através dos modelos de Elber e Schijve. Vimos que a formulação original da Lei de Paris possui caráter conservador, distanciando a análise numérica do comportamento real do corpo de prova. Assim sendo, a aplicação de diferentes abordagens do modelo de fechamento de trinca se mostrou eficiente ao prever com relativa precisão o comportamento da curva de vida em fadiga em ambos os exemplos numéricos.

As curvas de vida e os perfis interpolados após a propagação foram comparados com dados experimentais disponíveis na dissertação de Marcel Sato (2009), autor do algoritmo de propagação usado neste estudo. Os modelos numéricos remontados neste trabalho demonstraram a mesma confiabilidade dessa publicação, estabelecendo uma forte concordância com os dados obtidos em laboratório pelo pesquisador supracitado.

6.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

Uma vez que um dos focos deste trabalho foi a fixação dos conceitos mais importantes de Mecânica da Fratura e Fadiga dos materiais, a fim de que fosse possível entender de maneira clara as operações realizadas nas simulações numéricas apresentadas, através dos diferentes algoritmos utilizados, um foco sobre o Método dos Elementos de Contorno se mostra como sendo um avanço natural que poderá impulsionar complementações futuras ao presente estudo. Assim sendo, alguns pontos com relação a este fato podem servir de guia para estes trabalhos. A lista a seguir sugere alguns destes possíveis complementos.

- Modificação da função original da Integral J para realizar as integrações de forma analítica, o que evitaria os problemas de discretização encontrados em 3.5.4, bem como tornaria o programa mais rápido e econômico, uma vez que o tempo computacional seria reduzido.
- Implementar uma análise de forma a considerar problemas de propagação de trincas sob carregamento variável.
- Estudar o modelo de fechamento de trinca de forma mais completa, buscando compreender o fenômeno melhor.

- Verificar o resultado do fator de intensidade de tensão para diferentes nós ao longo das faces da trinca, no intuito de verificar a relação entre o erro relativo e o comprimento r .
- Realizar ensaios experimentais a fim de comparar os dados produzidos em laboratório com outros exemplos numéricos passíveis de serem modelados com o algoritmo de propagação apresentado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Albuquerque, Éder Lima de. **Determinação dos Fatores Dinâmicos de Intensidade de Tensão usando o Método dos Elementos de Contorno**. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo, 1997.
- Anderson, T.L. **Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications**. 2ª Edição, CRC Press, 1995.
- Bannantine, J. A., Corner, J. J. e Handrock, J. L. **Fundamentals of Metal Fatigue Analysis**. Prentice Hall, New Jersey, 1990.
- Barsom, R., e Rolfe, S. **Fracture and Fatigue Control in Structures**. 3ª Edição, ASTM, 1999.
- Brebbia, C.A. e Dominguez, J. **Boundary Elements An Introductory Course**, 2ª Edição, WIT Press, 1992.
- Broek, D. **Elementary Engineering Fracture Mechanics**. Martinus Nijhoff Publishers, 1982.
- Broek, D. **The Practical Use of Fracture Mechanics**. Kluwer, 1989.
- Elber, W. **Fatigue crack closure under cyclic tension**. Engineering Fracture Mechanics, 1970.
- Gdoutos, E.E. **Fracture Mechanics: An Introduction**. 2ª Edição, Springer, 2005.
- Gross, D. e Seelig, T. **Fracture Mechanics: With an Introduction to Micromechanics**, 2ª Ed., Springer, 2011.
- Janssen, M., Zuidema, J. e Wanhill, R. J. H. **Fracture Mechanics**, 2ª Ed., Spon Press, 2004.
- Jones, R., Chen, B., & Pitt, S. **Theoretical and Applied Fractures Mechanics**, 2007.
- Kane, James H. **Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics**, Prentice-Hall, 1994.
- Katsikadelis, John T. **Boundary Elements: Theory and Applications**, Elsevier, 2002.
- Martinez, J. & Dominguez, J. **On the Use of Quarter Point Elements for Stress Intensity Factor Computation**. Int. J of Numerical Methods, 1984.
- Paris, P. & Erdogan, F. **A critical analysis of crack propagation laws**. Journal of Basic Engineering Failure Analysis, 85, 528–534, 1960.
- Paris, P., Gomez, M., & Anderson, W. **A rational analytic theory of fatigue**. The Trend in Engineering Failure Analysis, 13, 9–14, 1961.

Ruggiero, M. A. G., Lopes, V. L. R. **Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais**. 2ª Edição, Pearson Education, 1996.

Sato, Marcel. **Modelagem de Problemas da Mecânica da Fratura e Propagação de Trincas em Fadiga**. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo, 2009.

Schijve, J. **Some formulas for the crack opening stress level**. Engineering Fracture Mechanics, 1981.

Shigley, J., Mischke, C. e Budynas, R. **Mechanical Engineering Design**, 6ª Ed., Bookman, 2005.

Stephens, R. I., Fatemi, A., Stephens, R. R. e Fuchs, H. O. **Metal Fatigue in Engineering**, 2ª Ed., Wiley-Interscience, 2001.

Suresh, Subra. **Fatigue of Materials**, 2ª Ed., Cambridge University Press, 1998.

Tada, H., Paris, P., Irwin, G. **The Stress Analysis of Cracks Handbook**, 3ª Ed., ASME Press, 2000.

ANEXOS

	Pág.
Anexo I Arquivo de entrada de dados para o programa <i>ElastQuadratico.m</i>	100
Anexo II Código para o cálculo da Integral <i>J</i> para o programa <i>dual.m</i>	102
Anexo III Arquivo de entrada de dados para o programa <i>dual.m</i>	105
Anexo IV Arquivo de entrada de dados para o algoritmo de propagação	107

ANEXO I: Arquivo de entrada de dados para os programas usados

```
% Arquivo de dados para análise elastostática pelo
% método dos elementos de contorno (elemento quadrático)
%
% Autor: Frederico Lourenço
% Data de criação outubro de 1999
% Revisão 0.0
%
```

```
% Matriz para definição de pontos da geometria
```

```
PONTOS = [1    0    0
           2   1.8    0
           3   1.8   1.8
           4   1.8  10.8
           5  -1.8  10.8
           6  -1.8   1.8
           7  -1.8    0];
```

```
% Matriz para definição de linhas
```

```
SEGMENTOS = [1 1 2 0
              2 2 3 0
              3 3 4 0
              4 4 5 0
              5 5 6 0
              6 6 7 0
              7 7 1 0];
```

```
% Matriz para definição da malha
```

```
ne=15;
```

```
MALHA = [1  2*ne
          2  1*ne
          3  1*ne
          4  1*ne
          5  1*ne
          6  1*ne
          7  2*ne];
```

```
NPX =12;           % N. de pontos na horizontal
NPY =20;           % N. de pontos na vertical
```

```
% Definição das condições de contorno
```

```
% Primeira coluna: número do segmento
% Segunda e terceira coluna: tipo e valor da C.C em x
% Quarta e quinta coluna: tipo e valor da C.C em y
% Tipo da C.C =    0 -> deslocamento é conhecido
%                1 -> carregamento é conhecido
```

```
CCSeg = [1 1 0 1 0
          2 0 0 1 0
          3 0 0 1 0
          4 1 0 1 1
          5 1 0 1 0
          6 1 0 1 0
          7 1 0 0 0];
```



```

% Propriedades do Material

E=1;
ni=0.3;

% Tipo de problema
% tipo problema = 1 => Estado Plano de tensão
% tipo problema = 2 => Estado Plano de deformação

tipo_problema=2;

% Definição da variável que será mostrada no mapa de cor
% op = 'dt' => Mostra o deslocamento total
% op = 'sigx' => Mostra a tensão sigmax
% op = 'sigy' => Mostra a tensão sigmay
% op = 'tauxy' => Mostra a tensão tauxy
% op = 'VM' => Mostra a tensão equivalente de von Mises

op='VM';

```

ANEXO II: Código para o cálculo da Integral J para o programa *dual.m*

```
% PROCEDIMENTO PARA CÁLCULO DOS PONTOS DA INTEGRAL J

clear PONTOS_INTJ
clear IntJi

% tamanho da matriz NOS_FIS que contém informações sobre os nós da malha
num_nos = length(NOS_FIS(:,1));

% Número de pontos utilizados para integrar numericamente a integral J
npontos=31;

PONTOS_INTJ(1,1)=1;
PONTOS_INTJ(1,2)=0;
PONTOS_INTJ(1,3)=0;
PONTOS_INTJ(1,4)=-pi;

% Procedimento que calcula o tamanho físico do elemento

x1 = NOS_FIS(1,2);
x2 = NOS_FIS(2,2);
y1 = NOS_FIS(1,3);
y2 = NOS_FIS(2,3);

tamanho_elem=sqrt( ((x2-x1)^2) + ((y2-y1)^2) );

% Final do procedimento que calcula o tamanho físico do elemento

% Procedimento que calcula o incremento utilizado no círculo da integral J

incremento=2*pi/(npontos-1);

% Procedimento que identifica o nó da ponta da trinca através da matriz NOS_FIS
comparando a % primeira e sétima colunas da matriz:

for i = 1:num_nos
    A1 = NOS_FIS(i,1);
    A2 = NOS_FIS(i,7);
    for j = i+1:num_nos
        B1 = NOS_FIS(j,1);
        B2 = NOS_FIS(j,7);
        if (A2-A1==1) & (B1-B2==1)
            if A1==B2 & A2==B1

                % Procedimento que gera o vetor de pontos para calcular a
integral:

                % Estas variáveis recebem as coordenadas geométricas do nó do
início da trinca
                X1 = NOS_FIS(A2,2);
                Y1 = NOS_FIS(A2,3);

                % Estas variáveis recebem as coordenadas geométricas do quinto
nó a partir da trinca
                X2 = NOS_FIS((A2+5),2);
                Y2 = NOS_FIS((A2+5),3);

                notrinca1=A2+5;
                notrinca2=A2-6;

                % Fórmula que calcula o raio de integração r
                R=sqrt(((X2-X1)^2) + ((Y2-Y1)^2));

                alpha = -pi+incremento;
```

```

        for i=1:npontos-2;
            Xj = X1 + R*cos(alpha);
            Yj = Y1 + R*sin(alpha);

            PONTOS_INTJ(i+1,:)=[i+1,Xj,Yj,alpha];
            alpha = alpha + incremento;
        end
        % Final procedimento que gera o vetor de pontos para calcular a
integral
    end
end
end
end

PONTOS_INTJ(1,2)=NOS_FIS(notrinca1,2);
PONTOS_INTJ(1,3)=NOS_FIS(notrinca1,3);

aux1=NOS_FIS(notrinca2,2);
aux2=NOS_FIS(notrinca2,3);

PONTOS_INTJ(npontos,1)=npontos+1;
PONTOS_INTJ(npontos,2)=PONTOS_INTJ(1,2);
PONTOS_INTJ(npontos,3)=PONTOS_INTJ(1,3);
PONTOS_INTJ(npontos,4)=pi;

% Procedimento que plota os pontos na figura
plot(PONTOS_INTJ(:,2),PONTOS_INTJ(:,3),'r+');
plot(X1,Y1,'kd');

% Funções que calculam a tensão, deslocamento e derivada do deslocamento nos
pontos que
% serão utilizadas para calcular a integral J

[tens_intj] = pin_tens_du(PONTOS_INTJ,ELEM_GEO,ELEM_FIS,NOS_GEO,NOS_FIS,De,trac);
[u_intj]= pin_des_du(PONTOS_INTJ,ELEM_GEO,ELEM_FIS,NOS_GEO,NOS_FIS,desl,trac);
[du_intj] = pin_du_du(PONTOS_INTJ,ELEM_GEO,ELEM_FIS,NOS_GEO,NOS_FIS,De,trac);

tens_intj(1,2)=tens_cont(notrinca1,2);
tens_intj(1,3)=tens_cont(notrinca1,3);
tens_intj(1,4)=tens_cont(notrinca1,4);

tens_intj(npontos,2)=tens_cont(notrinca2,2);
tens_intj(npontos,3)=tens_cont(notrinca2,3);
tens_intj(npontos,4)=tens_cont(notrinca2,4);

du_intj(1,2)=def_cont(notrinca1,2);
du_intj(1,3)=def_cont(notrinca1,3);
du_intj(1,4)=0;
du_intj(1,5)=0;

du_intj(npontos,2)=def_cont(notrinca2,2);
du_intj(npontos,3)=def_cont(notrinca2,3);
du_intj(npontos,4)=0;
du_intj(npontos,5)=0;

% Cálculo da integral

for i=1:npontos

    x=PONTOS_INTJ(i,2);
    y=PONTOS_INTJ(i,3);
    du1dx=du_intj(i,2);
    du2dy=du_intj(i,3);
    du1dy=du_intj(i,4);
    du2dx=du_intj(i,5);

```

```

        sig11=tens_intj(i,2);
        sig22=tens_intj(i,3);
        sig12=tens_intj(i,4);
        theta=PONTOS_INTJ(i,4);

        IntJi(i)=- (R* ((du1dx*sig11-duldy*sig12+du2dx*sig12-
du2dy*sig22)*cos(theta)+2*(du1dx*sig12+du2dx*sig22)*sin(theta)))/2;

end

% Procedimento que calcula a integra J pela REGRA 1/3 SIMPSON

h = incremento;
inicio=1;
fim=length(IntJi);

F1=(IntJi(inicio)+IntJi(fim));

F2=0;
for i=(inicio+1):(fim-2);
    F2=F2+IntJi(i);
end
F2=4*F2;

F3=0;
for i=(inicio+2):(fim-1);
    F3=F3+IntJi(i);
end
F3=2*F3;

INTJ=(h/3)*(F1+F2+F3);

If(tipo_prob==1)
    eta=1-ni^2; % estado plano de deformação
    E_or=E;
else
    eta=1; % estado plano de tensão
    E_or=E/(1-ni^2);
end;

KI=sqrt(E_or*INTJ/eta);
a=cracklength;
sig0=1;
KI_norm=KI/(sig0*sqrt(pi*a))

```

ANEXO III: Arquivo de entrada de dados para o programa *dual.m*

```
% Arquivo de dados para análise elastostática pelo
% método dos elementos de contorno (elemento quadrático)
%
% Autor: Frederico Lourenço
% Data de criação outubro de 1999
% Revisão 0.0
%

% Matriz para definição de pontos da geometria

b=.5;
h=5*b;
a=.4*b;
cracklength=a;

PONTO = [1      -b      -h/2
          2       b      -h/2
          3       b       h/2
          4      -b       h/2
          5      -a        0
          6       a        0];

% Matriz para definição de linhas
% No da linha No pto inicial No do ponto final Tipo de Elemento Tipo de
equação
% Tipo de elemento: 1 - Elemento quadrático contínuo
%                  2 - Elemento quadrático descontínuo
% Tipo de equação: 1 - Equação de deslocamentos
%                  2 - Equação de deslocamentos sem aplicação de corpo
rígido (superfície livre)
%                  3 - Equação de forças de superfícies

LINHA = [1 1 2
          2 2 3
          3 3 4
          4 4 1
          5 5 6
          6 6 5];

% Matriz para definição da malha

DISCRE = [1 16
           2 16
           3 16
           4 16
           5 4
           6 4];

% Definição das condições de contorno

% Deslocamento
% DESLOC = [linha, valor , direção(x=1,y=2)]

DESLOC = [];

% Tração em cada linha
```

```

% TRAC = [linha, valor, direção(x=1,y=2)]

TRAC = [1 -1 2;
        3  1  2];

NOS_RES=[17 1
          49 2;
          81 1;
          113 2];

% Propriedades do material

% Módulo de elasticidade (módulo de Young)
E = 100;          % [Pa]

% Coeficiente de Poisson

ni = 0.3;

% Tipo de problema (tipo_prob)
% 1. estado plano de deformação
% 2. estado plano de tensão

tipo_prob = 1;

```

ANEXO IV: Arquivo de entrada de dados para o algoritmo de propagação

```
% Implementado por Marcel Sato em seu trabalho de mestrado
% Outubro de 2008

% Matriz para definição de pontos da geometria

w = 127;
h = 209.1;
a = 22.6/2;
alfa = 0.7853982; % em graus
aux1 = cos(alfa)*a;
aux2 = sin(alfa)*a;
cracklength = a;
width = w;

%-----
% Inserindo pré-trincas
beta1 = -8.3832; % em graus
beta2 = 2.98005; % em graus
pre_crack = 4;
pt1x = aux1 + (pre_crack*cos(beta1));
pt1y = aux2 + (pre_crack*sin(beta1));
pt2x = -aux1 + (pre_crack*cos(beta2));
pt2y = -aux2 + (pre_crack*sin(beta2));
%-----

PONTO = [ 1  -w  -h
          2   w  -h
          3   w   h
          4  -w   h
          5 -aux1 -aux2
          6  aux1  aux2
          7  pt1x pt1y
          8  pt2x pt2y
        ];

% Matriz para definição de linhas
% No da linha No pto inicial No do ponto final Tipo de Elemento Tipo de
equação
% Tipo de elemento: 1 - Elemento quadrático contínuo
%                  2 - Elemento quadrático descontínuo
% Tipo de equação: 1 - Equação de deslocamentos
%                  2 - Equação de deslocamentos sem aplicação de corpo
rígido (superfície livre)
%                  3 - Equação de forças de superfícies

LINHA = [
          1 1 2 1 1 0
          2 2 3 1 1 0
          3 3 4 1 1 0
          4 4 1 1 1 0
          5 8 5 2 2 0
          6 5 6 2 2 0
          7 6 7 2 2 0
          8 7 6 2 3 0
          9 6 5 2 3 0
         10 5 8 2 3 0
        ];
```

```

% Matriz para definição da malha

DISCRE = [
    1  8
    2 16
    3  8
    4 16
    5  5
    6 25
    7  5
    8  5
    9 25
   10 5
];

% Definição das condições de contorno

% Deslocamento
% DESLOC = [linha, valor , direção(x=1,y=2)]

DESLOC = [];

% Tração em cada linha
% TRAC = [linha, valor, direção(x=1,y=2)]

TRAC = [
    1 -92.63  2
    %      3 120  2
];

%
nos = [49:65]';
rest1 = ones(length(nos),1);
rest2 = 2*rest1;
NOS_RES = [
    nos rest1
    nos rest2
    %      9 1
    %     33 2
    %     57 1
    %     81 2
];

% Propriedades do material

% Módulo de elasticidade (módulo de Young)
E = 72.4e3;      % [Pa]

% Coeficiente de Poisson

ni = 0.32;

% Tipo de problema (tipo_prob)
% 1. estado plano de deformação
% 2. estado plano de tensão

tipo_prob = 2;

% Razão de carregamento para calculo de fadiga.
stress_ratio = .0833;
% Constantes dependentes do material para utilizar a lei de Paris.

```



```
C_paris = 1.42e-8;  
m_paris = 3.59;  
% Tamanho do incremento para modelar a propagação.  
increm_size = 1;  
n_incrēm = 9; % Numero de incrementos que a trinca irá propagar.
```